Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

11. Übungsserie zur Abgabe am 6.01.2014

Thema: Stetige Funktionen

Hausaufgabe 36
Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} xS\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to -4} \frac{x^2-4x-32}{x+4}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}.$$

Die Funktion $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dabei gegeben durch $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Es handelt sich um die Potenzreihenentwicklung der sin-Funktion, die in §14 besprochen wird.

Hinweis: Nutzen Sie, dass es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|S(x)| \leq K$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Diese Aussage wird in §14 bewiesen.

Hausaufgabe 37
Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$g_n(x) := \frac{1+nx}{1+|nx|}.$$

Zeigen Sie, dass g_n für alle natürlichen n stetig ist.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die punktweise erklärte Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

stetig in x?

Hausaufgabe 38
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$,

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$,

(c) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{falls } x > \sqrt{2}, \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Hausaufgabe 39
Bearbeiten Sie eine der Tutoriumsaufgaben.

Tutoriumsaufgabe 26
Es sei $a_n = 2^n(1 + (-1)^n) + 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie

$$\limsup_{n\to\infty} a_n,\ \liminf_{n\to\infty} a_n,\ \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},\ \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{sowie } \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \text{ und } \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Tutoriumsaufgabe 27
Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit

$$f(x) = g(x), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}.$$

Man beweise, dass dann bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Tutoriumsaufgabe 28
Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ seien die Funktionen $f_+, f_- : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) < 0, \end{cases} \quad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) > 0. \end{cases}$$

Man zeige:

(a) Es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

(b) Die Funktion f ist genau dann stetig, wenn f_+ und f_- stetig sind.