Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

12. Übungsserie zur Abgabe am 13.01.2014

Thema: Stetige Funktionen II

Hausaufgabe 40
Es sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $F([a,b]) \subseteq [a,b]$. Man zeige, dass F mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein $x_0 \in [a,b]$ mit $F(x_0) = x_0$.

Hausaufgabe 41
Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Die Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$d(x) := \inf\{|x-y| : y \in M\} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Man zeige, dass d stetig ist.

Hausaufgabe 42
Untersuchen Sie die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Stetigkeit, wobei für $x \in [0,\infty)$

(a) $f(x) := \sqrt{x}$,

(b) $f(x) := \frac{x^2}{1+x}$,

(c) $f(x) := \frac{x^3}{1+x}$.

Hausaufgabe 43
Eine auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig* mit Lipschitz-Konstante $L > 0$, wenn für alle $x, y \in D$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|.$$

(a) Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig ist.

Tutoriumsaufgabe 29

(a) Es sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [a,b]$ gibt mit $f(x_0) = g(x_0)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{1}{1+x^2} = \sqrt{x}$$

eine Lösung $x_0 \in [0,\infty)$ besitzt.