Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

13. Übungsserie zur Abgabe am 20.01.2014

Thema: Stetige Funktionen III; Logarithmus und allgemeine Potenz

Hausaufgabe 44
Man beweise: Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $\xi \in I$, wenn der linksseitige Grenzwert $f(\xi-) := \lim\limits_{x \nearrow \xi} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $f(\xi+) := \lim\limits_{x \searrow \xi} f(x)$ existieren und übereinstimmen.

Bemerkung: Falls die oben stehenden Grenzwerte $f(\xi-)$ und $f(\xi+)$ existieren und mindestens einer dieser Werte verschieden von $f(\xi)$ ist, so heißt ξ *Sprungstelle* (oder *Unstetigkeitsstelle erster Art*) von f. Existiert einer der obigen Grenzwerte nicht, so spricht man von Unstetigkeitsstellen zweiter Art.

Hausaufgabe 45
Man beweise: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, so besitzt f höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Gilt diese Aussage auch für auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen?

Hinweis: Ein Element $\xi \in [a, b]$ heißt Unstetigkeitsstelle von f, falls ξ eine Unstetigkeitsstelle erster oder zweiter Art von f ist.

Hausaufgabe 46
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt und $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass $f(D)$ beschränkt ist.

Hausaufgabe 47
Zeigen Sie: Die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto a^x := \exp(x \log a)$ ist für $a > 1$ streng monoton wachsend und für $0 < a < 1$ streng monoton fallend. Weiterhin wird in beiden Fällen $\mathbb{R}$ bijektiv auf $(0, \infty)$ abgebildet und die Umkehrfunktion $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$

Tutoriumsaufgabe 30
Man beweise, dass für $a, b > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen gelten.

(a) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$,

(c) $a^x b^x = (ab)^x$,

(d) $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$.

Hinweis: Die allgemeine Potenz a^x für $x \in \mathbb{R}$ ist wie in Aufgabe 47 erklärt.