Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

14. Übungsserie zur Abgabe am 27.01.2014

Thema: Komplexe Zahlen

Hausaufgabe 48

(a) Es seien die komplexen Zahlen $z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ und $w = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ gegeben. Berechnen Sie $z + w, z \cdot w, \frac{1}{z}$ und $\frac{z}{w}$ und stellen Sie die Ergebnisse in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

(b) Gegeben sei $z = 1 + i$. Berechnen Sie z^4.

(c) Zerlegen Sie $z^4 - 1$ in Linearfaktoren.

(d) Die Punktmenge

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 2 \right\}$$

stellt einen Kreis in der Gaußschen Zahlenebene dar. Bestimmen Sie den Mittelpunkt. *Zur Erinnerung*: Ein Kreis in der Ebene mit Mittelpunkt (m_1, m_2) und Radius r ist durch die Kreisgleichung $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$ gegeben.

Hausaufgabe 49
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{2+i}\right)^n.$$

Hausaufgabe 50
Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

(a) Für ein Polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ für $z \in \mathbb{C}$ mit reellen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ beweise man: Ist $p(z) = 0$, so ist $p(\overline{z}) = 0$.

(b) Man bestimme alle Lösungen der Gleichungen $z^3 = 1$ und $w^6 = 1$. Was stellen diese Lösungen geometrisch dar?

Hausaufgabe 51
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *(Parallelogrammgleichung)*

(b) Für die Zahlen $a = m^2 + n^2$ und $b = p^2 + q^2$, die jeweils die Summe von Quadraten ganzer Zahlen m, n, p, q sind, ist auch $a \cdot b$ eine solche Summe.

Tutoriumsaufgabe 31
Man finde den Fehler in der folgenden Gleichungskette:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}^2 = i^2 = -1.$$

Tutoriumsaufgabe 32
Man beweise: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $exp(\overline{z}) = \overline{exp(z)}$.

Tutoriumsaufgabe 33
Für eine Folge komplexer Zahlen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeige man die folgende Aussage:
Ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine absolut konvergente Reihe, so ist sie auch konvergent in $\mathbb{C}$.