Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

3. Übungsserie zur Abgabe am 28.10.2013

Thema: Angeordnete Körper, Folgen und Grenzwerte

Hausaufgabe 5
Lösen Sie die Tutoriumsaufgabe 8 (a) oder (b). Überprüfen Sie anschließend, ob sich der von Ihnen gewählte Körper anordnen lässt.

Hausaufgabe 6
Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ die folgende Ungleichung gilt:

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{2n}.$$

Bestimmen Sie hieraus das Konvergenzverhalten der Folgen $\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$ und $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$.

Tutoriumsaufgabe 8:
Man weise für die folgenden Mengen mit den angegebenen Verknüpfungen nach, dass sie den Körperaxiomen $(A.1)-(A.4), (M.1)-(M.4)$ und (D) genügen.

(a) Die Menge $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$ mit den beiden Verknüpfungen

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad .$$

(b) Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, die definiert ist durch $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den beiden Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &\oplus : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ ((a,b),(c,d)) \mapsto (a+c, b+d) \\ \text{und} \quad &\odot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ ((a,b),(c,d)) \mapsto (a\cdot c - b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c), \end{aligned}$$

wobei $+$ bzw. $-$ und $\cdot$ die bekannten Verknüpfungen auf den reellen Zahlen sind.

Tutoriumsaufgabe 9:
In Analogie zu der Anordnung des Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ durch die $<$-Beziehung, die den Axiomen $(O.1), (O.2)$ und $(O.3)$ genügt, lassen sich allgemeiner Halbordnungen definieren:
Gegeben sei eine Menge M von Objekten und eine zweistellige Relation R in M, das heißt eine Menge R die der Beziehung

$$R \subseteq M \times M$$

genügt. Gehört ein Element $(m_1, m_2) \in M \times M$ zur Menge R, so schreiben wir $m_1 \mathrm{R} m_2$. Eine solche Relation R heißt Halbordnung auf M, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

(i) Für alle $m \in M$ gilt $m\mathrm{R}m$. *(Reflexivität)*

(ii) Gelten für $m_1, m_2 \in M$, dass $m_1\mathrm{R}m_2$ und $m_2\mathrm{R}m_1$, so folgt daraus, dass $m_1 = m_2$. *(Anti-Symmetrie)*

(iii) Gilt für $m_1, m_2, m_3 \in M$, dass $m_1\mathrm{R}m_2$ und $m_2\mathrm{R}m_3$, so folgt $m_1\mathrm{R}m_3$. *(Transitivität)*

Man beweise:

(a) Die Relation $\leq$ in $\mathbb{R}$ aus § 3 ist eine Halbordnung auf $\mathbb{R}$.

(b) Für eine Menge M mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Teilmengen-Beziehung $\subseteq$ eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(M)$.

(c) Die auf $\mathbb{R}^2$ erklärte Relation $\leq$, die definiert ist durch $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) :\Longleftrightarrow x_1 \leq x_2$ und $y_1 \leq y_2$.

Ist die $<$-Beziehung auf $\mathbb{R}$ eine Halbordnung? Welche der Eigenschaften $(O.1), (O.2)$ und $(O.3)$ sind für die Relation $\leq$ aus (c) erfüllt bzw. sinnvoll?

Tutoriumsaufgabe 10: Eine zweistellige Relation R auf einer Menge M (vgl. Tutoriumsaufgabe 9) heißt Äquivalenzrelation, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt

(i) Für alle $x \in M$ gilt $x\mathrm{R}x$. *(Reflexivität)*

(ii) Für alle $x, y \in M$ folgt aus $x\mathrm{R}y$ bereits $y\mathrm{R}x$ *(Symmetrie)*

(iii) Für alle $x, y, z \in M$ folgt aus $x\mathrm{R}y$ und $y\mathrm{R}z$ die Beziehung $x\mathrm{R}z$. *(Transitivität)*

Wir betrachten die Menge $M := \{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{R}[x], \quad q \neq 0\}$, dabei bezeichnet $\mathbb{R}[x]$ die Menge aller Polynome mit der 'Variable' x und reellen Koeffizienten. Die Bedingung $q \neq 0$ bedeutet, dass q verschieden vom Nullpolynom ist.
Wir definieren nun für $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'} \in M$ eine Relation $\sim$ auf M, durch

$$\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'} \ :\Longleftrightarrow \ \text{es gibt ein } c \in \mathbb{R}[x], \text{ sodass } \frac{p'}{q'} = \frac{c \cdot p}{c \cdot p}.$$

Man beweise, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist. Mit $\cdot$ ist die übliche Multiplikation von Polynomen gemeint. Bezüglich dieser Äquivalenzrelation $\sim$ zerfällt die Menge M in Äquivalenzklassen $[m]_\sim := \{m' \in M \ : \ m' \sim m\} \subset M$ und das Element m heißt Repräsentant der Klasse $[m]_\sim$.

Hinweis: Man beachte, dass sich Elemente $p \in \mathbb{R}[x]$ darstellen lassen als

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots n$ und $a_n \neq 0$. Die Operationen $\cdot$ und $+$ auf $\mathbb{R}[x]$ kann man so auffassen, dass man x als Variable auffasst und durch Ausmultiplizieren bzw. Anwendung des Assozativgesetztes jeweils wieder ein Polynom $p \cdot q$ bzw. $p + q$ erhält.

Tutoriumsaufgabe 11:
Es sei $a_n := \frac{1}{n^2-8} + 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie anhand der Definition von Konvergenz, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.