Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

4. Übungsserie zur Abgabe am 4.11.2013

Thema: Folgen und Grenzwerte

Hausaufgabe 7
Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, sei

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert.

(b) Geben Sie eine divergente Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ an, sodass die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

Hinweis: Die Folgenglieder b_n werden als die Cesàro-Mittel der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ bezeichnet. Zum Beweis spalte man für ein geeignetes festes $m \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder b_n für $n \geq m$ wie folgt auf:

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Man verwende anschließend ein „$\frac{\varepsilon}{2}$–Argument".

Hausaufgabe 8
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $a > 0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $a \geq 1$ und $0 < a < 1$. Formen Sie $a = (\sqrt[n]{a})^n$ so um, dass die Bernoullische Ungleichung (vgl. Hausaufgabe 2 (b)) angewendet werden kann.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1.$$

Hinweis: Formen Sie $n = (\sqrt[n]{n})^n$ so um, dass der Binomische Lehrsatz angewendet werden kann und schätzen Sie geeignet ab.

Tutoriumsaufgabe 12
Untersuchen Sie die Folge $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz!

Tutoriumsaufgabe 13
Zeigen Sie, dass die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n := \frac{(3-n)^3}{3n^3-1} \quad \text{und} \quad b_n := \frac{(n-2)^4}{(n+2)^2(4n^2-3)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

konvergieren und bestimmen Sie die Grenzwerte.

Tutoriumsaufgabe 14
Es seien a und b reelle Zahlen. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_0 := a,\ a_1 := b \text{ und } a_n := \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + a_{n-2}\right) \text{ für } n \geq 2.$$

Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Tutoriumsaufgabe 15
Gegeben sei eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Außerdem sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver natürlicher Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} = 0$. Man beweise, dass dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$ gilt.