Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

5. Übungsserie zur Abgabe am 11.11.2013

Thema: Folgen, Grenzwerte und Reihen

Hausaufgabe 9
Man beweise das *„Sandwich-Theorem"* für Folgen reeller Zahlen:

Zur Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gebe es konvergente Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $A_n \leq a_n \leq B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt zusätzlich noch $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Hausaufgabe 10
Es seien a und b reelle Zahlen. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_0 := a,\ a_1 := b \text{ und } a_n := \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + a_{n-2}\right) \text{ für } n \geq 2.$$

Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme ihren Grenzwert.

Hinweis: Man beweise ein Darstellungsformel für $a_{n+1} - a_n$ und verwende anschließend eine Teleskopsumme.

Hausaufgabe 11:
Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$ auf Konvergenz. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Hausaufgabe 12:
Für ein $\varepsilon > 0$ existiere ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert.

Tutoriumsaufgabe 16
Man beweise das folgende Korollar zu Satz 5 aus §4:

Es seien $A \leq B$ reelle Zahlen und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt die Ungleichung

$$A \leq \lim_{n\to\infty} a_n \leq B.$$

Tutoriumsaufgabe 17
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie: Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, dann sind es auch die Folgen $(\max\{a_n, b_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\min\{a_n, b_n\})_{n\in\mathbb{N}}$.
Gilt auch die Umkehrung? Begründen Sie ihre Aussage.

Tutoriumsaufgabe 18
Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

auf Konvergenz. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Hinweis: Bestimmen Sie Zahlen $A, B, C \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt.