Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

6. Übungsserie zur Abgabe am 18.11.2013

Thema: Cauchy-Folgen, Vollständigkeit

Hausaufgabe 13
Man beweise ohne Verwendung des Vollständigkeitsaxioms die folgenden Eigenschaften von Cauchy-Folgen:

(a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, das heißt es existiert eine reelle Zahl M, so dass $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen, so ist es auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen, so ist es auch die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hausaufgabe 14
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$|a_{n+1} - a_n| < q^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq q < 1$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Hausaufgabe 15 (4 Pkt)
Man gebe Beispiele reeller Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ an, sodass jeder der folgenden Fälle eintritt:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = c$, für eine beliebig vorgegebene Konstante $c \in \mathbb{R}$.

(d) Die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Hausaufgabe 16 (6 Pkt)
Es sei $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Hinweis: Man beweise zunächst, dass a_{n+2} zwischen a_n und a_{n+1} liegt. Anschließend zeige man $|a_n - a_{n+1}| \to 0$ für $n \to \infty$. Dafür ist es hilfreich $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_{n+2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit der Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nachzuweisen und Tutoriumsaufgabe 19 zu verwenden.

(b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die positive Lösung der Gleichung $x^2 + x = 1$ konvergiert.

Bemerkung: Man berechnet damit den Wert der Kettenbruchentwicklung $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}$. Daraus erhält man den Wert des goldenen Schnitts $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, der durch dass Verhältnis $g : 1 = 1 : g-1$ mit $g > 1$ gegeben ist.

Tutoriumsaufgabe 19
Für die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Beispiel (4.6) beweise man die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \infty$.

(b) Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ die Gleichung $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$.

Tutoriumsaufgabe 20
Bestimmen Sie zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die folgenden Eigenschaften besitzen:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = \infty$.

(d) Die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent aber nicht bestimmt divergent.

Tutoriumsaufgabe 21
Zeigen Sie, dass nicht jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, einen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ besitzt.
Somit ist $\mathbb{Q}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Ordnungsrelation ein angeordneter Körper der das Archimedische Axiom erfüllt, jedoch nicht das Vollständigkeitsaxiom.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $\sqrt{2}$ eine reelle Zahl ist und die Gleichung $x^2 = 2$ löst. Diese Aussage wird in §6 gezeigt.