Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

# Analysis I

7. Übungsserie zur Abgabe am 25.11.2013

*Thema: Teilfolgen, Satz von Bolzano-Weierstrass*

**Es sollen vier der unten stehenden Aufgaben abgegeben werden!**

**Hausaufgabe 17**
Man beweise, dass jede Folge reeller Zahlen eine monotone Teilfolge besitzt.

**Hausaufgabe 18**
Es sei $x$ eine vorgegebene reelle Zahl. Die Folge $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch

$$a_n(x) := nx - \lfloor nx \rfloor$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$.
Man beweise: Ist $x$ rational, dann besitzt die Folge $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ endlich viele Häufungspunkte. Ist $x$ irrational, dann ist jede reelle Zahl $a$ mit $0 \leq a \leq 1$ ein Häufungspunkt der Folge $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

**Hausaufgabe 19**
Zeigen Sie, dass eine Folge reeller Zahlen genau dann konvergiert, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungspunkt besitzt.

**Hausaufgabe 20**
Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende (bzw. fallende) Folge reeller Zahlen, die nicht konvergiert, bestimmt gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$) divergiert.

**Hausaufgabe 21**
Angenommen wir hätten statt dem Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$ das folgende Axiom verwendet:

(BW) *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Man beweise: Das Axiom $(BW)$ ist äquivalent zum Vollständigkeitsaxiom.

**Hinweis:** Zeigen Sie die Hilfsaussage: Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, dann konvergiert $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (gegen der Grenzwert der Teilfolge).