Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

8. Übungsserie zur Abgabe am 2.12.2013

Thema: Wurzeln, Konvergenz von Reihen

Hausaufgabe 22
Es sei $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Weiterhin sei $0 < a_0 < \frac{1}{b}$ und $a_{n+1} = 2a_n - ba_n^2$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{b}$.

Hausaufgabe 23
Wir betrachten das Iterationsverfahren

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} := \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$$

zur Berechnung der 3. Wurzel einer gegebenen reellen Zahl $a > 0$ und definieren den n-ten relativen Fehler f_n durch

$$f_n := x_n - \sqrt[3]{a}.$$

Man leite eine Rekursionsformel für die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ her und zeige

$$0 \leq f_{n+1} \leq f_n^2$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

Hausaufgabe 24
Beweisen Sie das Verdichtungskriterium zur Konvergenz von Reihen:

Für eine monotone fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Hausaufgabe 25
Die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ seien gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Untersuchen Sie die beiden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz.

Tutoriumsaufgabe 22
Man beweise die Ungleichung

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

zwischen dem geometrischen und arithmetischen Mittel der reellen Zahlen $a_1, \ldots a_n \geq 0$.

Tutoriumsaufgabe 23
Man gebe ein Beispiel für eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und eine beschränkte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n$ divergent ist.
Beweisen Sie, dass aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n$ folgt.