Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

9. Übungsserie zur Abgabe am 9.12.2013

Thema: Konvergenzkriterien für Reihen

Hausaufgabe 26

Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_n| \leq M$, $M > 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

(b) Ist $a_1 \neq 0$ so gilt

$$f(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < |x| < \frac{|a_1|}{2M}.$$

Hausaufgabe 27 *(Wurzelkriterium)*

Für die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ gebe es ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und ein $n_0 \geq 0$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe absolut konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Bedingung

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0$$

nicht hinreichend für die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ist. Ist dies eine notwendige Bedingung?

Hausaufgabe 28

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\left(\sqrt[3]{n}+1\right)^n}.$$

Hinweis: Man verwende $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$ mit der eulerschen Zahl e und Tutoriumsaufgabe 25.

Hausaufgabe 29
Es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe mit $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, und für $a \in \mathbb{R}$ seien $a^+ := \max\{a, 0\}$ und $a^- := \min\{a, 0\}$. Zeigen Sie:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^+$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^-$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$.

Tutoriumsaufgabe 24
Man untersuche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^{n-1}}$ auf Konvergenz. Dazu verwende man zuerst das Quotientenkriterium und anschließend das Wurzelkriterium aus Hausaufgabe 27.

Tutoriumsaufgabe 25
Man beweise die folgenden Divergenzkriterien für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

(a) Angenommen es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$$

für alle $n \geq n_0$, so ist die Reihe divergent.

(b) Gilt $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ für unendlich viele Indizes $n \in \mathbb{N}$, so divergiert die Reihe.