Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

10. Übungsserie zur Abgabe am 14.01.2015

Aufgabe 36

Wir betrachten für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit den (komplexen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ im folgenden das Integral $P_\gamma := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-A)^{-1} dz$ mit einer geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\lambda_i \notin \gamma([a,b])$ für alle $i = 1,\dots,n$, welches eintragsweise erklärt ist. Diese Abbildung heißt *Riesz-Dunford-Projektion.* Der Einfachheit wegen, wollen wir annehmen, dass γ eine Kreislinie beschreibt.

(a) Berechne $P_\gamma := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z - J(\lambda_i))^{-1} dz$ für einen Jordan-Block

$$J(\lambda_i) := \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

und $\gamma(\varphi) = \lambda_i + re^{i\varphi}$, wobei $r > 0$ so klein gewählt ist, dass λ_i der einzige Eigenwert von A im Inneren von γ ist. Zeige hierfür zunächst

$$(z - J(\lambda_i))^{-1} = \begin{pmatrix} (z-\lambda_i)^{-1} & -(z-\lambda_i)^{-2} & \dots & -(z-\lambda_i)^{-m} \\ 0 & (z-\lambda_i)^{-1} & \dots & -(z-\lambda_i)^{-m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (z-\lambda_i)^{-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Zeige nun, dass P_γ die Orthogonalprojektion auf die orthogonale Summe aller verallgemeinerten Eigenräume $\mathcal{L}_{\lambda_i}(A) = \bigcup_{j=1}^\infty \ker(A-\lambda_i)^j$ zu den Eigenwerten λ_i ist, die sich innerhalb von γ befinden.

Hinweis: Verwende Aufgabe 35 (a).

Aufgabe 39*

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $a \in U$ und

$$f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto f(x,t),$$

eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Für jedes feste $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $t \mapsto f(x,t)$ stetig im Punkt a.

(b) Für jedes feste $t \in U$ ist die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ über $\mathbb{R}$ integrierbar.

(c) Es gibt eine integrierbare Funktion $F : \mathbb{R} \to (0,\infty]$ mit

$$|f(x,t)| \leq F(x) \quad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R}\times U.$$

Dann ist die durch

$$g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)dx$$

definierte Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ im Punkt a stetig.

Aufgabe 40*

Beweise das Riemann-Lebesgue-Lemma mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz: Ist f integrierbar, so ist $\mathcal{F}[f]$ stetig mit $\lim\limits_{|\omega|\to\infty} \mathcal{F}[f](\omega) = 0$.

Hinweis: Substituiere $x \mapsto x + \frac{\pi}{\omega}$ im Integral von $\mathcal{F}[f]$.

Aufgabe 41

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = e^{-t^2}$.

(a) Zeige $\mathcal{F}[tf(t)](\omega) = -i\frac{\omega}{2}\mathcal{F}[f](\omega)$ und folgere hieraus

$$\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega) = -\frac{\omega}{2}\mathcal{F}[f](\omega).$$

(b) Es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. Bestimme nun $\mathcal{F}[f]$ als Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{2}y \quad \text{mit } y(0) = \sqrt{\pi}.$$