

Analysis III

11. Übungsserie zur Abgabe am 21.01.2015

Aufgabe 42 (6+2 P)

Untersuche die Existenz der Fourier-Transformationen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $a > 0$.
Im Fall der Existenz berechne man die Transformierte.

(a) $f(t) := e^{-a|t|}$,

(b) $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{falls } |t| \leq a, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$,

(c) $f(t) := \sin t$,

(d) $f(t) := e^{i\omega_0 t}$,

(e)* $f(t) := e^{it^2}$.

Aufgabe 43

Beweise den Faltungssatz: Für alle integrierbaren Funktionen f und g mit $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ und $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt < \infty$ gilt:

$$\mathcal{F}[f*g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$$

Dabei ist die Faltung $f*g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweier integrierbarer Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f*g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Aufgabe 44

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ bestimme man die Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} x(\tau) d\tau = f(t).$$

Aufgabe 45

Bestimme alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$y - y'' = e^{-3|x|}.$$