Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

12. Übungsserie zur Abgabe am 28.01.2015

Thema: Temperierte Distributionen

Aufgabe 46

Einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $|f(x)| \leq p(x)$ für ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ lässt sich auf die folgende Art eine Distribution $< f, \cdot >: \mathcal{S}(\mathbb{R})' \to \mathbb{C}$ zuordnen:

$$< f, \varphi >:= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Beweise, dass $< f, \cdot >$ eine temperierte Distribution ist.

Aufgabe 47

Eine Folge $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$ heißt konvergent gegen $T \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$, falls

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = T(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Wir schreiben hierfür $T_n \underset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{\to} T$.

(a) Gegeben sei eine Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert mit $|f_n(x)| \leq p(x)$ für ein Polynom $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Folgere $< f_n, \cdot > \underset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{\to} < f, \cdot >$.

(b) Beweise, dass die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(t) := \sin(nt)$, als Folge in $\mathcal{S}'$ aufgefasst, gegen Null konvergiert, das heißt $< f_n, \cdot > \underset{\mathcal{S}'}{\to} < 0, \cdot >$.

(c) Für eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ betrachten wir die Funktionen $f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} f(\frac{t}{\varepsilon})$ für $\varepsilon > 0$. Weise nach, dass für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ folgendes gilt:

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)\varphi(t)dt = \varphi(0).$$

Das heißt $< f_\varepsilon, \cdot > \underset{\mathcal{S}(\mathbb{R})'}{\to} \delta_0$ für $\varepsilon \searrow 0$.

Aufgabe 48

Berechne die Fourier-Transformation der folgenden temperierten Distributionen für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ und $t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$:

(a) $< \delta_{t_0}, \varphi >:= \varphi(t_0)$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

(b) $< f, \varphi >:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t}\varphi(t)dt$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

(c) $< f, \varphi >:= \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\omega_0 t)\varphi(t)dt$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

(d) $< f, \varphi >:= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)\varphi(t)dt$ für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.