Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2014/15

Analysis III

1. Übungsserie zur Abgabe am 22.10.2014

Thema: Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen

---

Ablauf: Die Übung findet wöchentlich Mittwoch um 13 Uhr im Raum C113 statt. Ein Übungsblatt enthält in der Regel vier Hausaufgaben. Pro Hausaufgabe werden bis zu fünf Punkte vergeben. Die restlichen, mit $*$ markierten, Aufgaben sind so vorzubereiten, dass sie in der Übung an der Tafel vorgestellt werden können. Die Hausaufgaben werden von Philipp Schmitz *(philipp.schmitz@tu-ilmenau.de)* korrgiert und eine Abgabe in Zweiergruppen ist erwünscht.

Schein: Zum Erhalt des Scheins „Analysis III“ als eine Prüfungsvorleistung für die Prüfung „Analysis III/IV“ werden folgende Anforderungen gestellt:

(i) Es müssen mindestens 50% der maximal vergebenen Hausaufgabenpunkte erreicht werden.

(ii) Es müssen mindestens zwei Aufgaben in der Übung an der Tafel vorgerechnet werden.

Über den Erhalt des Scheins wird schließlich im Rahmen einer mündlichen Rücksprache am Ende des Semesters entschieden.

Aufgabe 1
Löse die folgenden Differentialgleichungen:

(i) $y' = (x + y)^2$,

(ii) $(1 + x^2)y' + xy - xy^2 = 0$,

(iii) $y' + y + (\sin x + e^x)y^3 = 0$.

Verwende hierfür die Substitutionen $z = x + y$, $z = 1/y$ bzw. $z = 1/y^2$.

Aufgabe 2*
Betrachte die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, $f : G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, f k-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass jede Lösung φ dieser Differentialgleichung $k+1$-mal stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 3*
Bestimme alle Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung $y' = y^2$, $y(0) = y_0 \geq 0$. Gib für jede Lösung ihr maximales Definitionsintervall an.

Aufgabe 4
Es seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ und $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $h \not\equiv 0$. Zeigen Sie, dass das Problem der Lösung der *Bernoullischen Differentialgleichung*

$$y' + g(x)y + h(x)y^\alpha = 0$$

auf die Lösung einer linearen Differentialgleichung zurückgeführt werden kann und geben Sie die allgemeine Lösung an.

Aufgabe 5
Für $G \subseteq \mathbb{R}^2$ zusammenhängend, offen sowie stetige Funktionen $p, q : G \to \mathbb{R}$ heißt die Differentialgleichung

$$p(x, y) + q(x, y)y' = 0 \tag{1}$$

exakt, falls eine stetig differenzierbare Funktion F existiert, sodass

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = p(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = q(x, y).$$

a) Zeige, dass für ein Intervall I und eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\big\{(x, \varphi(x)) : x \in I\big\} \subseteq G$ die folgenden Aussagen äquivalent sind.

   (i) φ ist eine Lösung der Differentialgleichung (1).

   (ii) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $F(x, \varphi(x)) = c$ für alle $x \in I$.

b) Ist die DGL (1) exakt mit $(x_0, y_0) \in G$ und $q(x_0, y_0) \neq 0$, dann beweise man, dass ein reelles Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ existiert. Zeige außerdem: Für jede weitere Lösung $\widetilde{\varphi} : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ mit $x_0 \in \widetilde{I}$ gilt

$$\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I \cap \widetilde{I}.$$