Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2014/15

Analysis III

2. Übungsserie zur Abgabe am 29.10.2014

Thema: Elementare Lösungsmethoden für gewöhnliche Differentialgleichungen

Aufgabe 6

(a) Löse die Differentialgleichung $yy' = y^4 - 6y^3 + 10y^2 - 6y + 9$.

(b) Löse die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen, mittels Variation der Konstanten:

$$y' = y + x, \quad y' = xe^{-x^2} - 2xy, \quad y' = y + \cos x.$$

Aufgabe 7

Untersuche, welche der folgenden Differentialgleichungen exakt sind:

(a) $y \cos x + 2xe^y + (\sin x + x^2 e^y + 2)y' = 0$,

(b) $4x + 3y^2 + 2xyy' = 0$,

(c) $4 - (y/x)^2 + (2y/x)y' = 0, \quad x \neq 0$.

Im Falle der Exaktheit gebe man die allgemeine Lösung an.

Hinweis: Wende den Satz von Schwarz (Forster Band 2, §5, Satz 1) an, um zeigen, dass keine Exaktheit vorliegt.

Aufgabe 8*

Man gebe eine stetige Funktion $\mu : G \to \mathbb{R}$ mit $G \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und $\mu(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in G$ an, sodass die zur DGL (b) aus Aufgabe 7 äquivalente Differentialgleichung

$$\mu(x, y)(4x + 3y^2 + 2xyy') = 0$$

exakt wird. Eine solche Funktion μ heißt Eulerscher-Multiplikator, oder auch integrierender Faktor.

Aufgabe 9

Für ein reelles Intervall J und $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} : y/x \in J\}$ sei $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

wird als *homogen* bezeichnet.

(a) Überführe diese DGL mittels der Substitution $z = y/x$ in eine DGL mit getrennten Variablen. Zeige, dass $y(x) = xz(x)$ eine Lösung der ursprünglichen DGL ist.

(b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}, \quad y(1) = 1.$$

Aufgabe 10

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 - x^2, \quad y(0) = 1,$$

durch einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, indem man diese zunächst formale Reihe in die DGL einsetzt und einen Koeffizientenvergleich durchführt. Zeige anschließend (per Induktion), dass für die Koeffizienten die Abschätzung $|a_k| \leq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Schließe daraus, dass die so gefundene formale Lösung im Intervall $-1 < x < 1$ tatsächlich die Lösung der DGL darstellt.