Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk, H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

3. Übungsserie zur Abgabe am 5.11.2014

Aufgabe 11 (2 P)

Zeige, dass ein abgeschlossener Unterraum $U \subseteq X$ eines Banachraums $(X, \|\cdot\|)$ zusammen mit der von $\|\cdot\|$ induzierten Norm selbst ein Banachraum ist.

Aufgabe 12

Für einen endlich-dimensionalen Vektorraum X seien die Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ gegeben. Beweise, dass Konstanten c, $C \in (0, \infty)$ existieren, sodass

$$c\|x\|_0 \leq \|x\|_1 \leq C\|x\|_0, \quad \text{für alle } x \in X. \tag{1}$$

Man sagt, dass die Normen $\|\cdot\|_0$ und $\|\cdot\|_1$ zueinander äquivalent sind.

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Eigenschaft (1) *eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Normen auf X definiert. Überlege dir als Nächstes, wieso es ausreicht zu zeigen, dass jede Norm äquivalent ist zur Norm $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|$, wobei $x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ für eine fixierte Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von X.*

Aufgabe 13 (6 P)

Zeige, dass mithilfe der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{C}^n$ durch

$$\|A\|_2 := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

eine Norm auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben ist. Beweise außerdem, dass für eine beliebige Norm $\|\cdot\|_M$ auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ die Abbildung $\|\cdot\|_M : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \|A\|_M$, bezüglich der komponentenweisen Konvergenz in $\mathbb{C}^{n \times n}$ stetig ist. Ist A symmetrisch, dann überprüfe man

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

Aufgabe 14 (2 P)

Es sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Beweise, dass für eine kompakte Menge $K \subset U$ und die Jacobi-Matrix $J_f(x)$ von f in $x \in U$ folgendes gilt:

$$\sup_{x \in K} \|J_f(x)\|_2 < \infty.$$

Aufgabe 15

Zeige, dass für die Differentialgleichung $y' = 2\sqrt{|y|}$ der Eindeutigkeitssatz nicht gilt und bestimme alle Lösungen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der DGL mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$.