Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk, H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Analysis III

4. Übungsserie zur Abgabe am 12.11.2014

Thema: Das Gronwallsche Lemma

Aufgabe 16

Das Picard-Lindelöf-Iterationsverfahren zur Lösung der DGL $y' = f(x, y)$ zum Anfangswert $y(a) = c$ ist gegeben durch

$$\varphi_{k+1}(x) := c + \int_a^x f(t, \varphi_k(t))dt, \quad k \geq 1 \quad \text{und} \quad \varphi_0(x) := c, \quad x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon].$$

Berechne mit diesem Verfahren die Lösung des AWP $y' = 2y$, $y(0) = 3$.

Aufgabe 17

Beweise das Gronwallsche Lemma: Erfüllt $\psi : [0, T] \to \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\psi(s)ds, \quad t \in [0, T]$$

für Funktionen $\alpha, \beta : [0, T] \to \mathbb{R}$ und $\beta(t) \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$, dann folgt

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

Ist die Funktion α monoton wachsend, so kann (1) vereinfacht werden zu

$$\psi(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_0^t \beta(s)ds\right), \quad t \in [0, T].$$

Aufgabe 18*

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die einer globalen Lipschitz-Bedingung mit $L \in (0, \infty)$ genügt. Beweise, dass zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ eine auf dem ganzen Intervall I definierte Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ der DGL $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ existiert.

Aufgabe 19

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $G \subseteq I \times \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : G \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen, die in G einer Lipschitz-Bedingung mit $L > 0$ genügen. Wir betrachten die folgenden Differentialgleichungen:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad z' = g(x, z), \quad z(x_0) = z_0.$$

Beweise für die Lösungen φ bzw. ψ der obigen DGL, $M := \sup_{(x,y)\in G} |f(x, y) - g(x, y)|$ und für alle $x \in I$ die Abschätzung

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq |y_0 - z_0|e^{L|x-x_0|} + \frac{M}{L}(e^{L|x-x_0|} - 1).$$