Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

5. Übungsserie zur Abgabe am 19.11.2014

Thema: Lineare Differentialgleichungen

Aufgabe 20

Gegeben sei die Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0, \tag{1}$$

deren Koeffizienten stetige Funktionen $a_i : I \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ seien.
Man beweise: Die Wronski-Determinante $W : I \to \mathbb{R}$ eines Fundamentalsystems von Lösungen $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von (1) ist durch

$$W = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

gegeben und genügt der Differentialgleichung

$$W'(x) + a_{n-1}(x)W(x) = 0.$$

Anleitung: Zeige für eine Matrix $\Phi = (\varphi_{ij})_{i,j=1}^n$ mit differenzierbaren Einträgen $\varphi_{ij} : I \to \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\frac{d}{dx} \det \Phi(x) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \ldots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_{i1}'(x) & \ldots & \varphi_{in}'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \ldots & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

wobei für den i-ten Summanden nur die Ableitungen in der i-ten Zeile der Matrix gebildet werden.

Aufgabe 21*

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : I \to \mathbb{K}^{2\times 2}$ eine stetige Abbildung. Die Differentialgleichung $y' = A(x)y$ besitze die spezielle Lösung $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} : I \to \mathbb{K}^2$. Es gelte $\varphi_1(x) \neq 0$ für alle $x \in J \subseteq I$, J ein Teilintervall von I. Zeigen Sie, dass man eine zweite, von φ linear unabhängige Lösung $\psi : J \to \mathbb{K}^2$ durch den Ansatz

$$\psi(x) = u(x)\varphi(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

erhalten kann, wobei $u, g : J \to \mathbb{K}$ stetig differenzierbare Funktionen sind, die den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{aligned} g' &= \left(a_{22}(x) - a_{12}(x)\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\right) g, \\ u' &= \frac{a_{12}(x)}{\varphi_1(x)} g. \end{aligned}$$

Aufgabe 22

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Differentialgleichungssystems auf $(0, \infty)$:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + \frac{1}{x} y_2 + \ln x + \frac{1}{x}, \\ y_2' &= (1-x) y_1 + y_2 + (x-1)\ln x. \end{aligned}$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung des homogenen Systems ist $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$.

Aufgabe 23

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert man die Matrix-Exponentialfunktion $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$. Zeige, dass diese Reihe für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ konvergiert und die Funktion $x \mapsto e^{Ax}$ differenzierbar ist. Folgere, dass $\varphi(x) = e^{A(x-x_0)} y_0$ somit die Lösung der Differentialgleichung $y' = Ay$ zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ ist. Gib hiermit ein Lösungs-Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung an.

Aufgabe 24

Löse die Differentialgleichung einer gedämpfte Schwingung $y'' + 2\mu y' + \omega_0^2 y = 0$ mit Dämpfung $\mu > 0$, Kreisfrequenz $\omega_0 > 0$ und $\mu \neq \omega_0$. Benutze einen Exponentialansatz $\varphi(x) = e^{\lambda x}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$, um ein (komplexes) Lösungs-Fundamentalsystem zu erhalten. Bestimme außerdem ein reelles Fundamentalsystem.