Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

6. Übungsserie zur Abgabe am 26.11.2014

Thema: Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Aufgabe 25 (10 P)

Es sei $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ und $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$. Zu $p \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ mit $p(x) \neq 0$ für $x \in [a,b]$ und $q \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ betrachten wir das folgende Sturm-Liouville-Problem ($f \in \mathcal{C}^0[a,b]$)

$$(py')' + qy = f \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \tag{2}$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \tag{3}$$

Wir definieren eine lineare Abbildung $L : \mathcal{D}(L) \to \mathcal{C}^0[a,b]$ durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(L) &:= \{y \in \mathcal{C}^2[a,b] : y \text{ erfüllt (2) und (3)}\} \subset \mathcal{C}^0[a,b], \\ Ly &:= (py')' + qy, \quad y \in \mathcal{D}(L). \end{aligned}$$

Dann gibt es (vgl. Satz von Picard-Lindelöf) Funktionen $y_a, y_b \in \mathcal{C}^2[a,b]$ mit $y_a, y_b \neq 0$, so dass $(py_a')' + qy_a = 0 = (py_b')' + qy_b$ gilt, wobei y_a die Gleichung (2) und y_b die Gleichung (3) erfüllt.

(i) Zeige, dass für die Wronski-Determinante $W(x)$ der Funktionen y_a, y_b,

$$W(x) := \det \begin{bmatrix} y_a(x) & y_b(x) \\ y_a'(x) & y_b'(x) \end{bmatrix}, \quad x \in [a,b],$$

die folgenden Aussagen gelten.

(a) Für alle $x \in [a,b]$ gilt $(pW)'(x) = 0$. Also ist die Funktion pW gleich einer Konstanten.

(b) Ist L injektiv, so gilt $W(a) \neq 0$.

(ii) Es sei L injektiv, $c := (p(a)W(a))^{-1}$ und eine Greensche Funktion $g : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ sei definiert mittels

$$g(x,t) := \begin{cases} cy_a(x)y_b(t), & \text{falls } a \le x \le t \le b \\ cy_a(t)y_b(x), & \text{falls } a \le t \le x \le b. \end{cases}$$

$G : \mathcal{C}^0[a,b] \to \mathcal{C}^0[a,b]$ sei erklärt durch

$$(Gf)(x) := \int_a^b g(x,t) f(t) dt, \quad f \in \mathcal{C}^0[a,b].$$

Beweise, dass $\operatorname{ran}(G) = \mathcal{D}(L)$, $\ker(G) = \{0\}$, $LGf = f$ für $f \in \mathcal{C}^0[a,b]$ und $GLh = h$ für $h \in \mathcal{D}(L)$ gilt.

(iii) Zeige, dass ein Vektor ϕ genau dann Eigenvektor von L zum Eigenwert λ ist, wenn ϕ ein Eigenvektor von G zum Eigenwert $\frac{1}{\lambda}$ ist. In diesem Fall gilt

$$\dim \ker(\lambda I - L) = \dim \ker(\lambda^{-1} I - G) = 1.$$

Aufgabe 26

Beweise, dass

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

ein Polynom n-ten Grades ist und die Hermitesche-Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

löst. Weise außerdem nach, dass für $n \neq m$ die Hermite-Polynome H_n und H_m orthogonal zueinander sind bezüglich des gewichteten Skalarproduktes

$$(f, g) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-x^2} dx.$$

Aufgabe 27*

Löse die Schrödinger-Gleichung des harmonischen Oszillators für ein Teilchen der Masse $m \in (0, \infty)$ und mit der Frequenz $\omega \in (0, \infty)$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} y'' + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \hbar\omega(n + 1/2) y,$$

indem man zeigt, dass $y_n(x) = e^{-\frac{m\omega}{\hbar} x^2/2} H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x)$ eine Lösung der obigen Gleichung darstellt. Welchen Wert hat das Skalarprodukt

$$(y_n, y_m) := \int_{-\infty}^{\infty} y_n(x) y_m(x) dx \quad \text{für } n \neq m?$$