Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

8. Übungsserie zur Abgabe am 17.12.2014

Aufgabe 32
Es sei

$$A := \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{5} & 2 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ -\frac{13}{5} & -2 & -\frac{3}{5} & -\frac{13}{5} & -\frac{13}{5} & 0 \\ \frac{21}{10} & 2 & -\frac{2}{5} & \frac{21}{10} & \frac{11}{10} & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6\times 6}.$$

Berechne Matrizen $J, T \in \mathbb{C}^{6\times 6}$, so dass $\det T \neq 0$ und $T^{-1}AT = J$, wobei J die Jordan-Normalform von A ist. Berechne dazu die Eigenwerte und (passende) Eigenvektoren sowie (ggf.) Ketten von Hauptvektoren der Matrix A.
Bemerkung: Die Invertierung von Matrizen darf mit einem CAS (z.B. Maple) vorgenommen werden.

Aufgabe 33

Man beweise die folgenden Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion:

(a) $e^{(s+t)A} = e^{sA}e^{tA}$,

(b) $Se^{A}S^{-1} = e^{SAS^{-1}}$,

(c) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$, $(e^A)^T = e^{A^T}$,

(d) $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$,

(e) Aus $AB = BA$ folgt $Ae^B = e^B A$ und $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Aufgabe 34

Man beweise für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und die Matrixexponentialfunktion $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ den Spektralabbildungssatz:

$$\sigma(e^A) = e^{\sigma(A)} := \{e^\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\},$$

wobei $\sigma(A)$ die Menge der Eigenwerte einer Matrix A bezeichnet.

Aufgabe 35*

Wir definieren das Integral einer stetigen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, die auf dem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ erklärt ist, entlang einer stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene durch

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

(a) Man berechne für $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(\varphi) := z_0 + r \cdot e^{i\varphi}$, ein Kreis mit Mittelpunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$, und $k \in \mathbb{N}$ die Integrale

$$\int_\gamma (z - z_0)^{-k} dz.$$

(b) Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, stückweise stetig differenzierbar und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, sodass $\gamma([a, b]) \subset G$ und F_γ eine Stammfunktion von $f \circ \gamma$, so gilt

$$\int_\gamma f(z)dz = F_\gamma(b) - F_\gamma(a).$$

Insbesondere ist das Integral über geschlossene Kurven, das heißt $\gamma(a) = \gamma(b)$, gleich null.