Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk
H. Gernandt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Analysis III

9. Übungsserie zur Abgabe am 07.01.2014

Aufgabe 36

Wir betrachten für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit den (komplexen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ im folgenden das Integral $P_\gamma := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-A)^{-1}dz$ mit einer geschlossenen stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\lambda_i \notin \gamma([a,b])$ für alle $i = 1,\dots,n$, welches eintragsweise erklärt ist. Diese Abbildung heißt *Riesz-Dunford-Projektion.* Der Einfachheit wegen, wollen wir annehmen, dass γ eine Kreislinie beschreibt.

(a) Berechne $P_\gamma := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-J(\lambda_i))^{-1}dz$ für einen Jordan-Block

$$J(\lambda_i) := \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

und $\gamma(\varphi) = \lambda_i + re^{i\varphi}$, wobei $r > 0$ so klein gewählt ist, dass λ_i der einzige Eigenwert von A im Inneren von γ ist. Zeige hierfür zunächst

$$(z-J(\lambda_i))^{-1} = \begin{pmatrix} (z-\lambda_i)^{-1} & -(z-\lambda_i)^{-2} & \dots & -(z-\lambda_i)^{-m} \\ 0 & (z-\lambda_i)^{-1} & \dots & -(z-\lambda_i)^{-m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (z-\lambda_i)^{-1} \end{pmatrix}.$$

(b) Zeige nun, dass P_γ die Orthogonalprojektion auf die orthogonale Summe aller verallgemeinerten Eigenräume $\mathcal{L}_{\lambda_i}(A) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \ker(A-\lambda_i)^j$ zu den Eigenwerten λ_i ist, die sich innerhalb von γ befinden.

Hinweis: Verwende Aufgabe 35 (a).

Aufgabe 37

Bestimme für die Matrix A aus Aufgabe 32 ein Lösungs-Fundamentalsystem der Differentialgleichung $x' = Ax$.

Aufgabe 38

Bestimme die Lösungen der Poisson-Gleichung auf dem Quadrat $Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$, mit Rand ∂Q, für die Dirichlet-Randbedingung

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,y) = g(x,y), \quad f|_{\partial Q} \equiv 0, \quad g \in C(Q). \tag{1}$$

Anleitung: Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = \lambda f(x,y)$$

für $\lambda \in (0, \infty)$ mittels eines Separationsansatzes $f(x,y) = X(x)Y(y)$. Verwende (ohne Beweis), dass sich jede stetige Funktion $h \in C(Q)$ eindeutig darstellen lässt als

$$h(x,y) = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{k,l} \sin(kx) \sin(ly).$$

Setze diese Entwicklung für die Funktionen f und g in (1) ein. Leite durch formales gliedweises differenzieren der Reihen, eine Formel für die Lösung f her.