Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Übungsblatt 3
26. Oktober 2016

Analysis III

im Wintersemester 2016/2017

Abgabe: In der Übung am 2. November 2016

Aufgabe 9: Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung, d.h. ohne den Restterm.

Aufgabe 10: Es sei $\|\cdot\|_2$ die von der euklidischen Norm $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$,

$$\|A\|_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\|A\|_2 = \max\left\{|\lambda| : \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } A\right\}.$$

Aufgabe 11: Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine symmetrische Matrix. Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\top A x$$

im Punkt $(0,0)$ inklusive des Restterms.

Aufgabe 12: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. $\mathrm{Hess}_f(x)$ bezeichne die zugehörige Hesse-Matrix von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^2$. Ferner sei A der Wert der zweiten partiellen Ableitung nach der ersten Veränderlichen von f im Punkt x. Zeige, dass die Hesse-Matrix von f im Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ genau dann positiv definit ist, wenn $A > 0$ gilt und $\det \mathrm{Hess}_f(x) > 0$ erfüllt ist. Zeige eine analoge Aussgae für negativ definit.