Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Blatt 02
5. Mai 2015

Funktionentheorie und Integraltransformationen
SS 2015

Aufgabe 1: Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeige die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(a) Der $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert in $\mathbb{C}$.

(b) Es existieren ein $A \in \mathbb{C}$ und eine Funktion R, definiert auf einer Umgebung der Null, mit Werten in $\mathbb{C}$, sodass $\lim_{|h| \to 0} R(h)/|h| = 0$ und

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + R(z - z_0), \quad \text{für alle } z \in U.$$

Aufgabe 2: Zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, wenn die reellen Funktionen

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \mathrm{Re}(f(x + iy) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \mathrm{Im}(f(x + iy) \end{aligned}$$

differenzierbar sind und die *Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen*

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v \end{aligned}$$

erfüllen.

Aufgabe 3: Bestimme den Wert der folgenden Kurvenintegrale: (Alle Integrationswege seien mathematisch positiv orientiert.)

(a) $\int_{|z|=1} \frac{1}{|z|} dz$, (b) $\int_{|z+2i|=3} e^z dz$, (c) $\int_{|z+1|=1} \frac{1}{(z+1)(z-1)} dz$.