Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

Blatt 03
19. Mai 2015

Funktionentheorie
im SS 2015

Definition: Es seien $K \subset \mathbb{C}$ eine Kompakte Menge und $f, f_n : K \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert *gleichmäßig* gegen f, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{z\in K}|f(z) - f_n(z)|\right) = 0$$

gilt.

Aufgabe 7: Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $B_R(z_0)$ die offene Kugel um z_0 mit Radius $R > 0$. Wir betrachten eine analytische Funktion $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$. Die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

konvergiere punktweise für alle $z \in B_r(z_0)$ gegen $f(z)$. Zeige, dass eine reelle Zahl r mit $0 < r < R$ existiert, sodass f innerhalb der abgeschlossenen Kugel $\overline{B_r(z_0)}$ gleichmäßig gegen f konvergiert!

Aufgabe 8: Es sei f analytisch auf dem Gebiet U und $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Zeige, dass f die sogenannte *Mittelwerteigenschaft*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi})\,\mathrm{d}\varphi$$

besitzt!

Aufgabe 9: Es sei f analytisch auf dem Gebiet U und $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Zeige

$$\forall z, w \in B_r(z_0),\ z \neq w: \quad \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\eta - z_0| = r}\frac{f(\eta)}{(\eta - w)(\eta - z)}\,\mathrm{d}\eta.$$

Aufgabe 10: Bestimme mit Hilfe der Cauchyschen Integralformeln, die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,\mathrm{d}z,$ (b) $\displaystyle\int_{|z-1|=1}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n\mathrm{d}z.$