Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

Blatt 04
12. Juni 2015

Funktionentheorie und Integraltransformationen
im SS 2015

Aufgabe 12: In welchem Bereich konvergieren die Laurent-Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{|k|!}$ und

(b) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^{2k}}{k^2+1}$?

Aufgabe 13: Bestimme die Laurent-Reihen der Funktionen

(a) $\dfrac{z}{z^2+1}$ in $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-i| < 2 \}$ und

(b) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ in $\{ z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z| < 3 \}$!

Aufgabe 14: Bestimme die Werte der Residuen

(a) $\mathrm{res}_1 f$ für $f(z) = z e^{\frac{1}{1-z}}$ und

(b) $\mathrm{res}_{-1} f$ für $f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^3}$!

Hinweis: Betrachte für (b) die Laurent-Reihe von $g(z) = z^2$ um den Punkt $z = 1$!

Aufgabe 15: Es sei für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit einem Pol erster Ordnung in $z_0 \in G$ gegeben. Zeige, dass dann

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

gilt!

Aufgabe 16: Es seien p und q zwei Polynome, wobei der Grad von q um mindestens 2 größer sei als der Grad von p. Die rationale Funktion $R = \frac{p}{q}$ habe keine Polstellen auf der reellen Achse. Zeige, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{z \in \mathbb{C}^+} \mathrm{res}_z R \quad \text{für} \quad \mathbb{C}^+ := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$$

gilt! Berechne den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,!$$

Hinweis: Der Residuensatz gilt auch für Halbkreise.