Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

Blatt 05
30. Juni 2015

Funktionentheorie und Integraltransformationen
im SS 2015

Aufgabe 15 (**Faltungssatz**): Es seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Zeige, dass für die Faltung

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

die Beziehung

$$(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}f$$

in $\mathbb{R}^n$ erfüllt ist!

Bemerkung: Die Abbildung $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{i\xi^T x}\,\mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

ist die Umkehrabbildung der Fourier-Transformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es gelten $\mathcal{F}^3 = \mathcal{F}^{-1}$ und $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = \mathrm{id}_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)}$.

Aufgabe 16: Es sei $w \in \mathcal{S}(R)$ eine Schwarzfunktion und $\hat{w} = \mathcal{F}w \in \mathcal{S}(R)$ ihrer Fourier-Transformierte. Bestätige, dass für die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^4 u}{\mathrm{d}x^4}(x) + a^4 u(x) = w(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$ durch

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{w}(\xi)}{\xi^4 + a^4} e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der obigen Differentialgleichung gegeben ist.

Aufgabe 17: Es seien eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^{-x^T A x}$$

gegeben. Zeige dass

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}} e^{-\frac{1}{4}\xi^T A^{-1}\xi}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

gilt! Bestimme damit einen Fixpunkt der n-dimensionalen Fourier-Transformation!

Aufgabe 18: Wir definieren für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Funktion $\tau_\mu f$ und f_λ durch

$$(\tau_\mu f)(x) := f(x - \mu) \quad \text{und} \quad f_\lambda(x) := f(\lambda^{-1} x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Stelle die Fourier-Transformierten $\mathcal{F}(\tau_\mu f)$ und $\mathcal{F} f_\lambda$ mit Hilfe von $\mathcal{F} f$ dar!