Institut für Mathematik
Carsten Trunk
Philipp Schmitz

Blatt 06
12. Juli 2015

Funktionentheorie und Integraltransformationen
im SS 2015

Aufgabe 19: Wir betrachten für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ die Distribution $\delta_{x_0} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}))'$ mit

$$\delta_{x_0}(\phi) = \phi(x_0) \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Bestimme für die Distribution δ_{x_0} ihre Fourier-Transformierte!

Aufgabe 20: Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$-f'' + f = \delta \tag{1}$$

im Sinne von Distributionen, wobei δ die δ-Distribution bezeichne. Als eine Lösung bezeichnen wir dabei eine Distribution $f \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}))'$, welche

$$-(f'')(\phi) + f(\phi) = \delta(\phi) \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

erfüllt.

(i) Zeige mit Hilfe der Definition der Ableitung einer Distribution f, dass $f''(\phi) = f(\phi'')$ für alle $\phi \in (\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt!

(ii) Wende auf die Differentialgleichung (1) die Fourier-Transformation an.

(iii) Nimm an, dass die gesuchte Distribution sich durch eine integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mittels

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

darstellen lässt und verwende den Satz von Fubini!

(iv) Zeige nun, dass für $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ die Distribution $\langle f, \cdot \rangle$ die Differentialgleichung (1) erfüllt! Verwende dazu

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-|x|} e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\xi^2 + 1}.$$

Aufgabe 21: Wir betrachten für $t \geq 0$ das Anfangswertproblem

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = t, \quad f(0) = 0, f'(0) = 1. \tag{2}$$

Berechne mit Hilfe der Laplace-Transformation eine Lösung f des Anfangswertproblems (2)! Verwende dazu folgende Beziehungen der Laplace-Transformation:

1. Es seien f eine stetig differenzierbare Funktion und c, a positive Konstanten, sodass $|f'(t)| \leq ce^{at}$ für $t \geq 0$ gilt. Dann ist auch $|f(t)| \leq \frac{c}{a}e^{at}$ für $t \geq 0$ erfüllt und es gilt

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0), \mathrm{Re}(s) > a.$$

2. Für $f(t) = te^{-t}$ für $t \geq 0$ ist $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{(1+s)^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > -1$.
3. Für $f(t) = e^{-t}$ für $t \geq 0$ ist $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{(1+s)}$ für $\mathrm{Re}(s) > -1$.
4. Für $f(t) = t$ für $t \geq 0$ ist $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{s^2}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$.
5. Für $f(t) = 1$ für $t \geq 0$ ist $(\mathcal{L}f)(s) = \frac{1}{s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Hinweis: Für $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ erhalten wir die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(s+1)^2 s^2} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s}.$$