Mathematik 1

Vorlesung von
Prof. Dr. Carsten Trunk
im Wintersemester 2011/2012 an der TU Ilmenau

Mitschrift: Michael Pfeiffer

Letzte Korrektur: 8.11.2012

Wichtige Hinweise:

Bei diesem Skript handelt es sich um eine *studentische* Mitschrift. Daher gilt es Folgendes zu beachten:

1. **Dieses Skript ist nicht fehlerfrei!** Das Skript wurde nicht korrekturgelesen, daher sind Fehler bei den Sätzen und Definitionen möglich und sogar wahrscheinlich (von Tippfehlern ganz zu schweigen). Besonders an diesen „kritischen" Stellen ist daher *immer* eine andere Quelle zu Rate zu ziehen.
2. **Dieses Skript ist nicht vollständig!** Es fehlen unter anderem einige Beispiele und Beweise. Zudem finden sich keinerlei Erläuterungen, es wurde nur versucht, die Tafelanschrift so gut wie möglich wiederzugeben. Lediglich die Sätze und Definitionen sind *wahrscheinlich* alle vorhanden.
3. **Die Gliederung war nicht Teil der Vorlesung!** Sie wurde ohne weiteres mathematisches Sachverständnis erstellt, und dient nur dazu, die Sätze und Definitionen über das Inhaltsverzeichnis leichter auffindbar zu machen. Sie stellt jedoch keine offizielle Einteilung des Vorlesungsstoffes dar. Dasselbe gilt für die meisten „Überschriften" der Sätze und Definitionen.

Hinweise und Fehlerkorrekturen bitte an:
Michael Pfeiffer <michael.pfeiffer@tu-ilmenau.de>

Erstellt mit LaTeX.

Inhaltsverzeichnis

I. Lineare Algebra **6**

1. Lineare Gleichungssysteme **7**
1.1. Grundlagen . . . 7
1.1.1. Definition . . . 7
1.2. Das Gaußverfahren . . . 8
1.2.1. Matrixschreibweise . . . 8
1.2.2. Das Gaußverfahren . . . 10
1.2.3. Der Rang einer Matrix . . . 14
1.2.4. Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen . . . 15

2. Matrizen **17**
2.1. Definition . . . 17
2.2. Rechnen mit Matrizen . . . 17
2.2.1. Addition . . . 17
2.2.2. Skalarmultiplikation . . . 18
2.2.3. Transposition . . . 18
2.2.4. Matrixmultiplikation . . . 18
2.2.5. Rechenregeln . . . 19
2.3. Lösungsstrukturen linearer Gleichungssysteme . . . 20
2.4. Inverse Matrizen . . . 22
2.5. Determinanten . . . 24
2.5.1. 2x2-Matrizen . . . 24
2.5.2. 3x3-Matrizen . . . 27
2.5.3. nxn-Matrizen . . . 27

3. Komplexe Zahlen **30**
3.1. Grundlagen . . . 30
3.1.1. Definition . . . 30
3.1.2. Addition . . . 31
3.1.3. Gaußsche Zahlenebene . . . 31
3.1.4. Betrag und konjugiert komplexe Zahl . . . 32
3.1.5. Multiplikation . . . 33
3.2. Darstellungsformen . . . 35
3.2.1. Karthesische Darstellung . . . 35

3.2.2. Trigonometrische Darstellung . . . 35
3.2.3. Polardarstellung . . . 37
3.2.4. Polynome mit komplexen Koeffizienten . . . 39

4. Vektorräume **40**
4.1. Grundlagen . . . 40
4.1.1. Definition . . . 40
4.1.2. Linearkombination und Span . . . 41
4.2. Unterräume und Basen . . . 42
4.2.1. Unterraum und Lineare Unabhängigkeit . . . 42
4.2.2. Basis und Dimension . . . 43
4.3. Lineare Abbildungen . . . 44
4.3.1. Begriffe . . . 44
4.3.2. Lineare Abbildungen . . . 45
4.3.3. Matrixdarstellung . . . 45
4.4. Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 46
4.4.1. Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 46
4.4.2. Eigenräume . . . 48

5. Skalarprodukt **52**
5.1. Grundlagen . . . 52
5.1.1. Definition . . . 52
5.2. Norm, Winkel und Kreuzprodukt . . . 53
5.2.1. Norm . . . 53
5.2.2. Winkel . . . 53
5.2.3. Kreuzprodukt . . . 54
5.3. Abstand eines Vektors zu einem Vektorraum . . . 54
5.3.1. Orthonormalbasis . . . 54
5.3.2. Orthogonale Matrizen . . . 55
5.3.3. Projektion auf Unterräume . . . 55
5.4. Spezielle Klassen von Matrizen . . . 56
5.4.1. Symmetrische Matrizen . . . 56
5.4.2. Diagonalisierbarkeit . . . 56

II. Analysis **58**

6. Folgen **59**
6.1. Zahlen und Intervalle . . . 59
6.1.1. Zahlen . . . 59
6.1.2. Notation von Intervallen . . . 59
6.2. Folgen . . . 59
6.2.1. Grundlagen . . . 59
6.2.2. Konvergenz und Divergenz . . . 60

6.2.3. Monotonie 62

7. Differentiation **64**
7.1. Grenzwerte und Stetigkeit 64
7.1.1. Grenzwerte 64
7.1.2. Stetigkeit 65
7.2. Extremwerte 66
7.2.1. Infinimum und Supremum 66
7.2.2. Minima und Maxima 66
7.3. Differentiation 67
7.3.1. Definition 67
7.3.2. Rechenregeln 67
7.3.3. Die Umkehrfunktion 68
7.3.4. Injektivität und Surjektivität 68
7.3.5. Die Arkusfunktionen 69
7.4. Konsequenzen aus der Differentiation 70
7.4.1. Globale Minima und Maxima 70
7.4.2. Der Mittelwertsatz 71
7.4.3. Monotonie 72
7.4.4. Regel von L' Hospital 72
7.5. Taylorapproximation 73
7.5.1. Die Taylorformel 73
7.5.2. Die Exponentialfunktion 74
7.5.3. Umkehrung der Exponentialfunktion: Der Logarithmus 75

8. Integration **76**
8.1. Grundlagen 76
8.1.1. Definition 76
8.1.2. Integrationsregeln 77
8.1.3. Sätze über die Integration 77
8.2. Integrationsverfahren 79
8.2.1. Integration durch Substitution 79
8.2.2. Partielle Integration 80
8.2.3. Integration komplexwertiger Funktionen 80
8.2.4. Partialbruchzerlegung 81
8.3. Uneigentliche Integrale 82
8.4. Fourier-Analysis 84

Teil I.

Lineare Algebra

1. Lineare Gleichungssysteme

1.1. Grundlagen

1.1.1. Definition

Definition 1: Lineares Gleichungssystem

Es seien n, m natürliche Zahlen:

$$n, m \in \mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\begin{array}{cccc}
b_1, & b_2, & \ldots & b_m \\
a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\
a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\
a_{31}, & a_{32}, & \ldots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots & a_{mn}
\end{array}$$

seien reelle Zahlen ($\in \mathrm{R}$) und

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

seien die Unbekannten.

Dann heißt

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

lineares Gleichungssystem mit n unbekannten und m Gleichungen.

Ein Tupel von Zahlen $t_1^L, t_2^L, \ldots t_n^L$, geschrieben als

$$\begin{pmatrix} t_1^L \\ \vdots \\ t_n^L \end{pmatrix}$$

heißt Lösung des linearen Gleichungssystems, falls gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}t_1^L & + & \dots & + & a_{1n}t_n^L & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}t_1^L & + & \dots & + & a_{mn}t_n^L & = & b_m \end{array}$$

Alle Lösungen des linearen Gleichungssystems werden in der Lösungsmenge L zusammengefasst:

$$\mathrm{L} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1^L \\ \vdots \\ t_n^L \end{pmatrix} \middle| \dots \right\}$$

Das lineare Gleichungssystem heißt lösbar, falls $\mathrm{L} \neq \emptyset$. Es heißt unlösbar, falls $\mathrm{L} = \emptyset$. Es heißt, eindeutig lösbar, falls L nur aus einem Element besteht.

Beispiel:

$$\begin{array}{rccccccc|c} \text{I:} & x_1 & + & x_2 & = & 1 & \\ \text{II:} & 3x_1 & + & 3x_2 & = & 3 & 3\text{I} - \text{II} \\ \hline & x_1 & + & x_2 & = & 1 & \\ & 0 & + & 0 & = & 0 & \end{array}$$

$$0 \cdot x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = t \qquad t \in \mathrm{R}$$
$$x_1 + t = 1$$
$$x_1 = t - 1$$

$$\mathrm{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t, t \in \mathrm{R} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{R} \right\}$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, aber nicht eindeutig lösbar.

1.2. Das Gaußverfahren

1.2.1. Matrixschreibweise

1. Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 0 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Es genügt, die Koeffizienten und die rechte Seite zu betrachten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\mathsf{I}-\mathsf{II} \\ 4\mathsf{I}-\mathsf{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Wieder als Gleichungen schreiben und „von unten nach oben" auflösen:

$$\begin{array}{ccccccl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \quad \Rightarrow x_1 + \frac{2}{7} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{14} \\ & & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \quad \Rightarrow 7x_2 - 1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{7} \\ & & & & 2x_3 & = & -1 \quad \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Ein rechteckiges Zahlenschema A bestehend aus den Zahlen $a_{ij} \in \mathrm{R}$ mit $1 \leq j \leq n, 1 \leq j \leq m$ der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nennen wir $m \times n$-Matrix oder Matrix mit m Zeilen und n Spalten. ($a_{\mathbf{m}n} \to$ Zeilen zuerst!)

2. Beispiel

$$\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & x_5 & + & 0 & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & - & x_5 & + & x_6 & = & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathsf{I}-\mathsf{II} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathsf{II}+\mathsf{III} \\ \mathsf{II}+\mathsf{IV} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{rcrcrcll} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 1 & \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -5 \\ & - & x_5 & + & x_6 & = & 0 & \Rightarrow x_5 = 2 \\ & & & & x_6 & = & 2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} & x_1 = t \qquad x_2 = r \qquad x_3 = s \\ & \Rightarrow x_4 = -5 - x_1 - 2x_2 - x_3 \\ & \Rightarrow x_4 = -5 - t - 2r - s \end{aligned}$$

$$\mathrm{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ r \\ s \\ -5 - t - 2r - s \\ 2 \\ 2 \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} t \in \mathrm{R} \\ s \in \mathrm{R} \\ r \in \mathrm{R} \end{array} \right\}$$

1.2.2. Das Gaußverfahren

Gegeben:

$$(A|b) \quad \text{in der Form} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * \end{array}\right) \quad \text{mit} \quad A \neq \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$*$:= ein Eintrag (bel.) $\qquad$ $\bullet$:= ein Eintrag $\neq 0$

1. Schritt

Zeilen tauschen bis $\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & \cdots & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & \cdots & * & * \end{array}\right)$

2. Schritt

Mittels Addition von Vielfachen von Zeilen erzeuge unter dem Element 1. Zeile, 1. Spalte Nullen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bullet & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right)$$

3. Schritt

Entweder: Zeilen tauschen, bis der Eintrag in der 2. Zeile, 2. Spalte $\neq 0$ ist, darunter wieder Nullen erzeugen (siehe 2. Schritt):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \bullet & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & \bullet & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right)$$

Oder: Man kann durch Zeilentauschen keinen Eintrag in der 2. Zeile, 2. Spalte $\neq 0$ erzeugen, aber in der 3. Spalte (darunter wieder Nullen erzeugen).

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} \bullet & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right)$$

Oder: Man kann durch Zeilentauschen keinen Eintrag in der 2. Zeile, 2. Spalte $\neq 0$ erzeugen und auch nicht in der 3. Spalte, aber in der 4. (darunter wieder Nullen erzeugen).

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \bullet & * & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right)$$

Nach 3. Schritt

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & \bullet & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & * \end{array}\right)$$

4. Schritt

Analog für alle weiteren Zeilen anwenden.

Nach 4. Schritt

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)$$

Definition 2: Zeilenstufenform

Eine Matrix A in dieser Gestalt heißt in **Zeilenstufenform**.

Bemerkung: Nach dem Gaußverfahren ist die Matrix A in Zeilenstufenform, aber die erweiterte Matrix $(A|b)$ nicht unbedingt.

1. Beispiel

(aus 1.2.1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

A und $(A|b)$ sind in Zeilenstufenform. Eindeutige Lösbarkeit (In 1.2.1 ermittelt):

$$\mathrm{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

2. Beispiel

(aus 1.2.1)

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A und $(A|b)$ sind in Zeilenstufenform. Nicht-eindeutige Lösbarkeit (In 1.2.1 ermittelt):

$$\mathrm{L} = \left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ r \\ s \\ -5 - t - 2r - s \\ 2 \\ 2 \end{array} \right) \middle| \begin{array}{c} t \in \mathrm{R} \\ s \in \mathrm{R} \\ r \in \mathrm{R} \end{array} \right\}$$

3. Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \text{II} - \text{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \quad -1$$

A und $(A|b)$ sind in Zeilenstufenform. Nicht lösbar.

4. Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\mathsf{I}-\mathsf{II} \\ \mathsf{I}-\mathsf{II} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2\mathsf{II}-\mathsf{III} \\ \mathsf{II}-\mathsf{IV} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mathsf{III}-\mathsf{IV} \end{array}$$

$$\Rightarrow 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \quad 1$$

Nicht lösbar. A ist in Zeilenstufenform, $(A|b)$ jedoch nicht. Es ist ein weiterer Schritt notwendig:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nun ist auch $(A|b)$ in Zeilenstufenform.

1.2.3. Der Rang einer Matrix

Definition 3: Rang einer Matrix

Ist eine Matrix A in Zeilenstufenform gegeben, so definieren wir

$$\text{rang}A := \quad \text{„Anzahl der Stufen“}$$

Liegt sie nicht in Zeilenstufenform vor, so formen wir sie wie im Gaußverfahren um.

1. Beispiel:

$$\text{rang}A = 3 \qquad \text{rang}(A|b) = 3$$

2. Beispiel:

$$\text{rang}A = 3 \qquad \text{rang}(A|b) = 3$$

3. Beispiel:

$$\text{rang}A = 2 \qquad \text{rang}(A|b) = 3$$

4. Beispiel:

$$\text{rang}A = 2 \qquad \text{rang}(A|b) = 3$$

Satz 4: Zusammenhang zwischen dem Rang einer Matrix und dem Rang der erweiterten Matrix

rang$(A|b)$ ist entweder gleich rang$A$ oder gleich $(\text{rang}A) + 1$, dh. es gilt:

$$\text{rang}A \leq \text{rang}(A|b) \leq (\text{rang}A) + 1$$

1.2.4. Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Satz 5: Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn gilt:

$$\text{rang}A = \text{rang}(A|b)$$

In diesem Fall liefert das Gaußverfahren

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c} \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & * \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$* :=$ ein Eintrag (bel.) $\qquad \bullet :=$ ein Eintrag $\neq 0$

mit rang$A$ vielen Zeilen ungleich Null und $m -$ rang$A$ vielen Zeilen gleich Null.

- Ist in diesem Fall rang$A = n$, dann ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.
- Ist in diesem Fall rang$A < n$, dann ist das Gleichungssystem lösbar, aber nicht eindeutig lösbar (es gibt $n -$ rang$A$ Freiheitsgrade).

Ist das Gleichungssystem nicht lösbar, also rang$A <$ rang$(A|b)$ (in diesem Fall gilt rang$(A|b) = ($rang$A) + 1$) dann liefert das Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccc|c}
\bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \bullet & * & \cdots & * & * \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

	rang$A$	rang$(A\|b)$	lösbar	eindeutig lösbar
$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	2	3	nein	
$\left(\begin{array}{cc\|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$	2	2	ja	ja
$\left(\begin{array}{ccccc\|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$	3	4	nein	

2. Matrizen

2.1. Definition

Definition 6: Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ist eine Matrix.} \qquad \begin{matrix} a_{ij} \in \mathrm{R} \\ 1 \leq i \leq m \text{ Zeilen} \\ 1 \leq j \leq n \text{ Spalten} \end{matrix} \quad .$$

A ist eine $m \times n$-Matrix (auch $A \in \mathrm{R}^{m \times n}$ oder $A \in \mathrm{R}^{(m,n)}$).

Beispiel:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ ist eine } m \times 1\text{- Matrix (Vektor).}$$

2.2. Rechnen mit Matrizen

A, B seien $m \times n$-Matrizen, $\alpha \in \mathrm{R}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2.1. Addition

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2.2. Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2.3. Transposition

A^T ist die transponierte Matrix von A. Bei der Transposition wird die erste Zeile zur ersten Spalte, die zweite Zeile zur zweiten Spalte und so weiter.

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b^T = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

A^T ist eine $n \times m$-Matrix, b^T eine $1 \times m$-Matrix.

2.2.4. Matrixmultiplikation

Definition 7: Matrixmulitplikation

A sei eine $m \times n$-Matrix, B sei eine $n \times p$-Matrix, wobei $m, n, p \in \mathrm{N} \backslash \{0\}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} :=$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{11} \cdot b_{1p} + a_{12} \cdot b_{2p} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{np} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \ldots + a_{2n} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{21} \cdot b_{1p} + a_{22} \cdot b_{2p} + \ldots + a_{2n} \cdot b_{np} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{n1} & \cdots & a_{m1} \cdot b_{1p} + a_{m2} \cdot b_{2p} + \ldots + a_{mn} \cdot b_{np} \end{pmatrix}$$

$A \times B$ ist eine $m \times p$-Matrix.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Notation in Summenschreibweise:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \qquad n \in \mathrm{N}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n =: \sum_{j=1}^{n} a_j$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{j1} & \ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot b_{j1} & \ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot b_{jp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot b_{j1} & \ldots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot b_{jp} \end{pmatrix}$$

2.2.5. Rechenregeln

Satz 8: Rechengesetze bei Matrizen

Es seien $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$
A, B, C $m \times n$-Matrizen
V $l \times m$-Matrix
X $m \times n$-Matrix
Y $n \times p$-Matrix
Z $p \times r$-Matrix

Dann gilt:

1. $A + B = B + A$ (Kommutativität).
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ und $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$ (Assoziativität).
3. $(A + B) \cdot Y = A \cdot Y + B \cdot Y$ und $V \cdot (A + B) = V \cdot A + V \cdot B$ (Distributivität).
4. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ und $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ (Distributivität) sowie $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ (Assoziativität) und $1 \cdot A = A$.
5. $(A + B)^T = A^T + B^T$ und $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ sowie $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Beweis:

1.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & + & \cdots & + & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & + & \cdots & + & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & + & \cdots & + & b_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{m1} & + & \cdots & + & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & + & \cdots & + & b_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{m1} & + & \cdots & + & b_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & + & \cdots & + & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & + & \cdots & + & a_{mn} \end{pmatrix} = B + A$$

□

Frage: Gilt $A \cdot B = B \cdot A$?

Nein, denn zum Beispiel:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & 1+0 \\ 0+2 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+3 & 0+2 \\ 1+0 & 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ!

2.3. Lösungsstrukturen linearer Gleichungssysteme

Notation: Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit A $m \times n$-Matrix. Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ heißt homogen. Ist $\vec{b} \neq \vec{0}$, so heißt $A\vec{x} = \vec{b}$ inhomogenes Gleichungssystem.

Satz 9: Linearkombinationen

Es seien $\vec{x_0}$ und $\vec{x_1}$ Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$. Dann ist für beliebige $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ $\alpha\vec{x_0} + \beta\vec{x_1}$ eine Lösung des Gleichungssystems.

Notation: $\alpha\vec{x_0} + \beta\vec{x_1}$ heißt Linearkombination.

Beweis:

Es gilt $A\vec{x_0} = 0$ und $A\vec{x_1} = 0$ (nach Voraussetzung), daher gilt auch (mit Satz 8):

$$A(\alpha\vec{x_0} + \beta\vec{x_1}) = \alpha A\vec{x_0} + \beta A\vec{x_1} = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

□

Satz 10: Superposition

Es sei $\vec{x_0}$ eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b_0}$ und $\vec{x_1}$ sei eine Lösung von $A\vec{x} = \vec{b_1}$. Dann ist $\vec{x_0} + \vec{x_1}$ Lösung von $A\vec{x} = \vec{b_0} + \vec{b_1}$.

Beweis:

Es gilt $A\vec{x_0} = \vec{b_0}$ und $A\vec{x_1} = \vec{b_1}$, daher gilt auch:

$$A(\vec{x_0} + \vec{x_1}) = A\vec{x_0} + A\vec{x_1} = \vec{b_0} + \vec{b_1}$$

$\square$

Hauptsatz 11: Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme

Es seien A $m \times n$-Matrix und $\vec{b}$ $m \times 1$-Matrix, betrachte

(hom) $A\vec{x} = 0$ mit Lösungsmenge $\mathrm{L_H} = \left\{ \vec{x_H} \quad n \times 1\text{-Matrizen} \;\middle|\; A\vec{x_H} = 0 \right\}$

(inhom) $A\vec{x} = \vec{b}$ mit Lösungsmenge L

Dann gilt: Wähle eine Lösung $\vec{x_p}$ von (inhom) („Partikularlösung“, $A\vec{x_p} = \vec{b}$), so gilt

$$\mathrm{L} = \left\{ \vec{x_p} + \vec{x_H} \;\middle|\; x_H \in \mathrm{L_H} \right\}$$

Beweis:

1. $\vec{x_p} + \vec{x_H}$ ist eine Lösung von (inhom), denn

$$A(\vec{x_p} + \vec{x_H}) = A\vec{x_p} + A\vec{x_H} = A\vec{x_p} + 0 = \vec{b} + 0 = \vec{b}$$
$$\Rightarrow A(\vec{x_p} + \vec{x_H}) = \vec{b} \Rightarrow \vec{x_p} + \vec{x_H} \text{ ist Lösung von (inhom)}$$
$$\Rightarrow \vec{x_p} + \vec{x_H} \in \mathrm{L}, \text{ das heißt } \left\{ \vec{x_p} + \vec{x_H} \;\middle|\; \vec{x_H} \in \mathrm{L_H} \right\} \subset \mathrm{L}$$

   Bemerkung: A, B seien Mengen. Gilt für jedes $a \in A$ auch $a \in B$, dann schreiben wir $A \subset B$ („enthält“, Teilmenge).

2. Sei $\vec{x_0}$ Lösung von (inhom). Ziel: Bestimme $\vec{x_p}, \vec{x_H}$ so, dass gilt: $\vec{x_0} = \vec{x_p} + \vec{x_H}$. Betrachte:

$$\vec{x_0} - \vec{x_p} \in \mathrm{L_H} \text{ (wegen Superposition)}$$

   denn

$$A(\vec{x_0} - \vec{x_p}) = A\vec{x_0} - A\vec{x_p} = \vec{b} - \vec{b} = 0$$

   und mit $\vec{x_0} := \vec{x_p} + \vec{x_H}$ (siehe Vorausetzung) gilt

$$\vec{x_0} = \vec{x_p} + \vec{x_0} - \vec{x_p} = \vec{x_p} + \vec{x_H} \text{ mit } \vec{x_H} \in \mathrm{L_H}$$

$\square$

2.4. Inverse Matrizen

Wir betrachten nur $n \times n$-Matrizen.

$$7 \cdot \frac{1}{7} = 7 \cdot 7^{-1} = 1$$

7^{-1} ist das inverse Element bezüglich der Multiplikation mit 7.

Frage: Wann existiert eine Matrix A^{-1} mit $A^{-1} \cdot A = 1$?

Definition: Die $n \times n$-Matrix I (oder I_n) mit

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

heißt Einheitsmatrix.

Bemerkung: Es gilt $I \cdot A = A = A \cdot I$. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Definition 12: Invertierbarkeit einer Matrix

Eine $n \times n$-Matrix heißt invertierbar, falls eine $n \times n$-Matrix A^{-1} existiert.

Beispiel:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, denn $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ist die inverse Matrix, da

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = I$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat keine Inverse. Annahme: Es existiert eine Inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ mit

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

Also ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht invertierbar.

Satz 13: Kommutativgesetz bei Inversen

Es sei A eine $n \times n$-Matrix. A sei invertierbar (d. h. es existiert A^{-1} mit $A^{-1} \cdot A = I$), dann gilt auch $A \cdot A^{-1} = I$.

Beachte: Wir invertieren nur $n \times n$-Matrizen.

Berechnung der Inversen:

$$(A|I) \rightsquigarrow (I|A^{-1}) \qquad \text{(über Gaußverfahren)}$$

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Invertiere A}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 8 \cdot \mathsf{I} + \mathsf{II} \\ 2 \cdot \mathsf{I} + \mathsf{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathsf{II} + 4 \cdot \mathsf{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathsf{I} + \mathsf{III} \\ \mathsf{II} + 7 \cdot \mathsf{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 8 & -28 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :4 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Probe: (nicht zwingend notwendig)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 14: Zeilenstufenform und Invertierbarkeit einer Matrix

Wenn A invertierbar ist, dann darf in der Zeilenstufenform keine Nullzeile stehen, da in der Identität sicher ein Eintrag $\neq 0$ in der letzten Zeile steht. Da A $n \times n$-Matrix ist, hat sie somit rang$A = n$, also gilt:

Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn rang$A = n$ ist.

2.5. Determinanten

2.5.1. 2x2-Matrizen

Definition 15: Determinante einer 2x2-Matrix

A sei eine 2×2-Matrix, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5$$

Regel 1:

$\det A = \det A^T$

Beweis:

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \det A$$

Regel 2:

Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten), so wechselt die Determinante das Vorzeichen.

Beweis:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = -\det A$$

Regel 3:

Multipliziert man **eine** Zeile (Spalte) mit $\lambda \in \mathrm{R}$, so multipliziert sich auch die Determinante mit λ.

Beweis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \lambda a_{22} - a_{12} \cdot \lambda a_{21} = \lambda \det A$$

Regel 4:

Besitzen die Elemente einer Zeile (Spalte) den gemeinsamen Faktor $\lambda \in \mathrm{R}$, so darf man ihn vor die Determinante ziehen. Beweis siehe Regel 3.

Regel 5:

1. Alle Elemente einer Zeile (Spalte) sind Null.
2. Zwei Zeilen (Spalten) stimmen überein.
3. Eine Zeile (Spalte) ist die Vielfache einer anderen.

Gilt 1. oder 2. oder 3., dann ist $\det A = 0$.

Beweis:

1. $$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

2. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{12} \cdot a_{11} = 0$$

3. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \lambda a_{12} - a_{11} \cdot \lambda a_{12} = 0$$

Regel 6:

Der Wert der Determinanten ändert sich nicht, wenn man von einer Zeile oder Spalte ein Vielfaches einer anderen addiert.

Beweis:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+\lambda a_{21})a_{22} - (a_{12}+\lambda a_{22})a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} + \lambda a_{21}a_{22} - a_{12}a_{21} - \lambda a_{22}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$$

Regel 7:

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Regel 8:

Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist die Multiplikation der Diagonaleinträgen.

Beweis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11} \cdot a_{22}$$

Satz 16: Determinante und Invertierbarkeit

Unter dem Gaußverfahren ändert sich der Wert der Determinante nicht. Es gilt:

$$A \text{ ist invertierbar } (=) \det A \neq 0$$

Beweis:

Die erste Behauptung folgt aus Regel 6. Ist nach dem Gaußverfahren eine Nullzeile vorhanden (in der Zeilenstufenform), so gilt rang$A < 2$, also ist A nicht invertierbar (Satz 14 für $n = 2$) und mit Regel 5 gilt $\det A = 0$. Ist nach dem Gaußverfahren keine Nullzeile in der Zeilenstufenform vorhanden, so ist rang$A = 2$, also ist A invertierbar und mit Regel 8 gilt $\det A \neq 0$.

2.5.2. 3x3-Matrizen

Definition 17: Determinante einer 3×3-Matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Regel von Sarrus (gilt nur für 3×3-Matrizen!):

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ \hline - & - & - & & \end{array}$$

Beispiel:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 4 & 5 & -1 \end{array} \right. = 12 - 20 - 105 + 2 = -111$$

Satz 18: Rechenregeln für Determinanten von 3x3-Matrizen

Für die Determinanten von 3×3-Matrizen gelten die Regeln 1-8 wie bei den 2×2-Matrizen.

2.5.3. nxn-Matrizen

Definition 19: Algebraisches Komplement

A sei eine $n \times n$-Matrix. D_{ik} bezeichne die Determinante, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht. Setze:

$$A_{ik} := (-1)^{i+k} D_{ik} \qquad \text{(„algebraisches Komplement")}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -14 - 3 = -17 \\
A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot (-17) = 1 \cdot (-17) = -17 \\
D_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\
A_{23} &= (-1)^5 \cdot 1 = -1
\end{aligned}
$$

Definition 20: Laplace-Determinantenentwicklungssatz

A sei eine $n \times n$-Matrix. Dann gilt:

$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$ („Entwicklung nach der ersten Zeile")

beziehungsweise

$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ („Entwicklung nach der i-ten Zeile")

oder

$\det A = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}$ („Entwicklung nach der k-ten Spalte")

Bemerkung: „Entwickle nach der Zeile oder Spalte mit den meisten Nullen!"

Rechenregeln für Determinanten

A sei $n \times n$-Matrix.

1. $\det A = \det A^T$
2. Vertauscht man eine Zeile bzw. Spalte, so wechselt die Determinante das Vorzeichen.
3. Multipliziert man eine Zeile bzw. Spalte mit λ, so multipliziert sich die Determinante ebenfalls mit λ.
4. Gemeinsame Faktoren einer Zeile bzw. Spalte dürfen vor die Determinante gezogen werden.
5. $\det A = 0$ falls gilt:
   a) A hat eine Nullzeile/Nullspalte.
   b) Zwei Zeilen/Spalten stimmen überein.
   c) Eine Zeile/Spalte ist das Vielfache einer anderen.
6. Die Determinanten ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile/Spalte das Vielfache einer anderen addiert. Ist sie ungleich Null, so ist sie auch nach dem Gaußverfahren ungleich Null.

7. $\det AB = \det A \cdot \det B$
8. Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Satz: A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

3. Komplexe Zahlen

3.1. Grundlagen

3.1.1. Definition

Die komplexen Zahlen werden unter anderem bei der Berechnung von Eigenwerten und den Nullstellen von Polynomen, bei Differentialgleichungen und in der Elektrotechnik verwendet.

Herleitung: Es gibt kein $x \in \mathrm{R}$ für das gilt

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \end{aligned}$$

Daher setze $i := \sqrt{-1}$, dann gilt

$$i^2 = -1$$

Beispiel:

$$x^2 - 4x + 13 = 0$$

pq-Formel:

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Also gilt:

$$p = -4 \quad q = 13 \qquad \Rightarrow \qquad x_{12} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm 3\sqrt{-1} = 2 \pm 3i$$

Definition: Die Menge der komplexen Zahlen C ist durch folgende Menge gegeben:

$$\mathrm{C} := \left\{ \; x + iy \;\middle|\; x, y \in \mathrm{R} \; \right\}$$

3.1.2. Addition

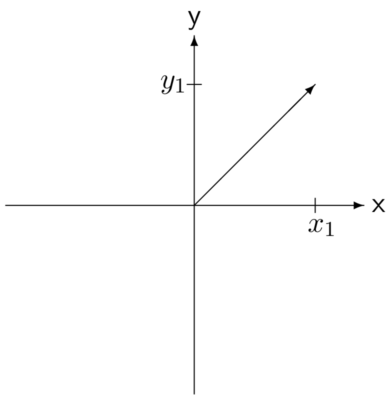
Es seien $z_1, z_2 \in \mathrm{C}$, das heißt $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathrm{R}$, dann gilt:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

3.1.3. Gaußsche Zahlenebene

C wird anschaulich dargestellt als $\mathrm{R}^2 = \mathrm{R}^{2\times 1}$.

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$
$$z_2 = x_2 + iy_2 \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$



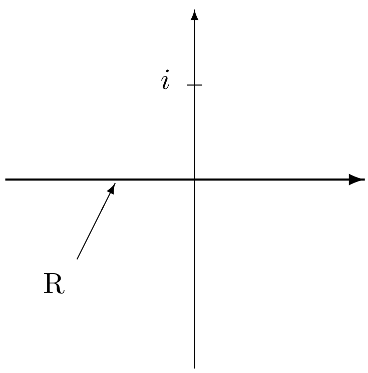
Notation:

$$\text{Re}z_1 := x_1 \qquad \text{Im}z_1 := y_1$$
„Realteil von z_1" „Imaginärteil von z_1"

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}z_1 \\ \text{Im}z_1 \end{pmatrix}$$

Wo sind i und R?

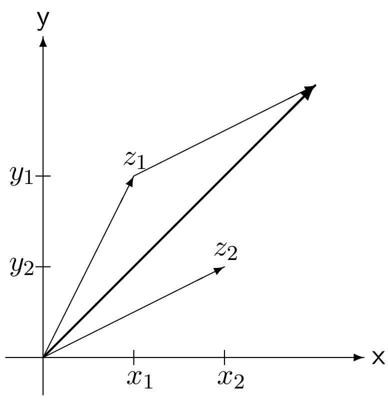
$$i = 0 + 1 \cdot i$$
$$\text{Sei } x \in \mathrm{R} \rightsquigarrow z = x + 0 \cdot i$$



Die Addition in der Zahlenebene:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\begin{array}{r} \mathsf{Re}(z_1 + z_2) = x_1 + x_2 \\ \mathsf{Im}(z_1 + z_2) = y_1 + y_2 \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$



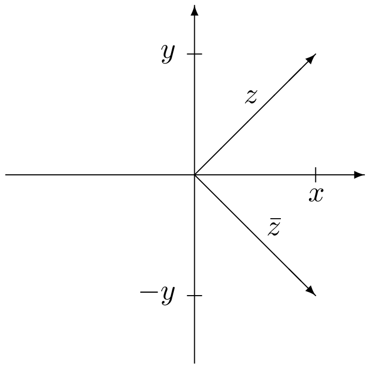
3.1.4. Betrag und konjugiert komplexe Zahl

Definition: Sei $z \in \mathrm{C}$, $\qquad z = x + iy \qquad x, y \in \mathrm{R}$. Dann definiere

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\mathsf{Re}z)^2 + (\mathsf{Im}z)^2}$$

und definiere die zu z konjugiert komplexe Zahl

$$\bar{z} := x - iy$$



Für $z \in \mathrm{C}$ gilt

$$\text{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$
$$\text{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

Beweis:

$$\frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(x + iy + x - iy) = \frac{1}{2}2x = x = \text{Re}z$$
$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}(x + iy - (x - iy)) = \frac{1}{2i}2iy = y = \text{Im}z$$

3.1.5. Multiplikation

Definition 21: Multiplikation von komplexen Zahlen

Es seien $z_1, z_2 \in \mathrm{C}$ mit $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ und $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathrm{R}$. Dann definiere:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$$

Beispiele:

1. $(1 + 2i)(3 + i) = 3 + i + 6i + 2i \cdot i = 3 + 7i - 2 = 1 + 7i$
2. $(1 + 2i)\overline{(1 + 2i)} = (1 + 2i)(1 - 2i) = 1 - 4i^2 = 1 + 4 = 5 \ (= 1 + 2^2 = |1 + 2i|^2)$ (Verwendung der 3. binomischen Formel)
3. a) $\overline{(1 + 2i)} \cdot \overline{(2 + 3i)} = (1 - 2i)(2 - 3i) = 2 - 3i - 4i + 6i^2 = -4 - 7i$
   b) $\overline{(1 + 2i)(2 + 3i)} = \overline{2 + 3i + 4i - 6} = \overline{-4 + 7i} = -4 - 7i$
4. a) $|1 + 2i| \cdot |1 + 3i| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{50}$
   b) $|(1 + 2i) \cdot (1 + 3i)| = |1 + 3i + 2i + 6i^2| = | - 5 + 5i|$

Satz 22: Rechenregeln für die Multiplikation

Seien $z_1, z_2 \in \mathrm{C}$, so gilt

1. $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$
2. $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$
3. $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$

Satz 23: Rechengesetze für komplexe Zahlen

Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathrm{C}$, dann gilt

1. Die Addition ist kommutativ (d.h. $z_1+z_2 = z_2+z_1$) und assoziativ (d.h. $(z_1+z_2)+z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$).
2. Es existiert ein neutrales ($z_1 + 0 = z_1$) und inverses ($z_1 + (-z_1) = 0$) der Addition.
3. Die Multiplikation ist kommutativ (d.h. $z_1 z_2 = z_2 z_1$) und assoziativ d.h. $(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$).
4. Es existiert ein neutrales ($z_1 \cdot 1 = z_1$) und inverses ($z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = 1$).
5. Das Distributivgesetz gilt: $z_1(z_2) + z_3) = z_1(z_2 + z_1 z_3)$

Beispiele:

1. $(2 + 3i) + (1 + 2i) = (1 + 2i) + (2 + 3i)$ (Kommutativität der Addition)
2. $(2 + 3i) + 0 = 2 + 3i$ (Existenz eines neutralen Elements der Addition)
3. $(2 + 3i) + (-2 - 3i) = 0$ (Existenz eines inversen Elements der Addition)
4. $(2 + 3i) \cdot (1 + 2i) = (1 + 2i) \cdot (2 + 3i)$ (Kommutativität der Multiplikation)
5. $(2 + 3i) \cdot 1 = 2 + 3i$ (Existenz eines neutralen Elements der Multiplikation)

Beweis der Existenz eines inversen Elements der Multiplikation:

Beispiel: $\frac{1}{2+3i} = x + iy$

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{4+9} = \frac{2}{13} - i\frac{3}{13}$$

Allgemein gilt:

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{x_1 + y_1} = \frac{x_1 - y_1}{(x_1 + y_1)(x_1 - y_1)} = \frac{x_1 - y_1}{{x_1}^2 - {y_1}^2}$$

Probe:

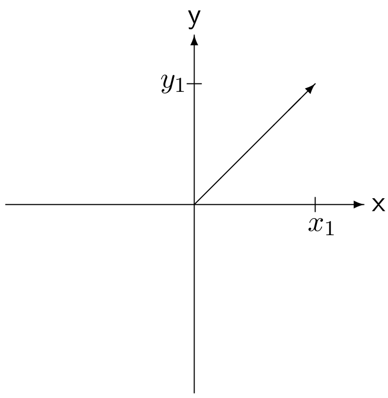
$$z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = (x_1 + y_1) \cdot \frac{x_1 - y_1}{{x_1}^2 - {y_1}^2} = \frac{{x_1}^2 - {y_1}^2}{{x_1}^2 - {y_1}^2} = 1$$

3.2. Darstellungsformen

3.2.1. Karthesische Darstellung

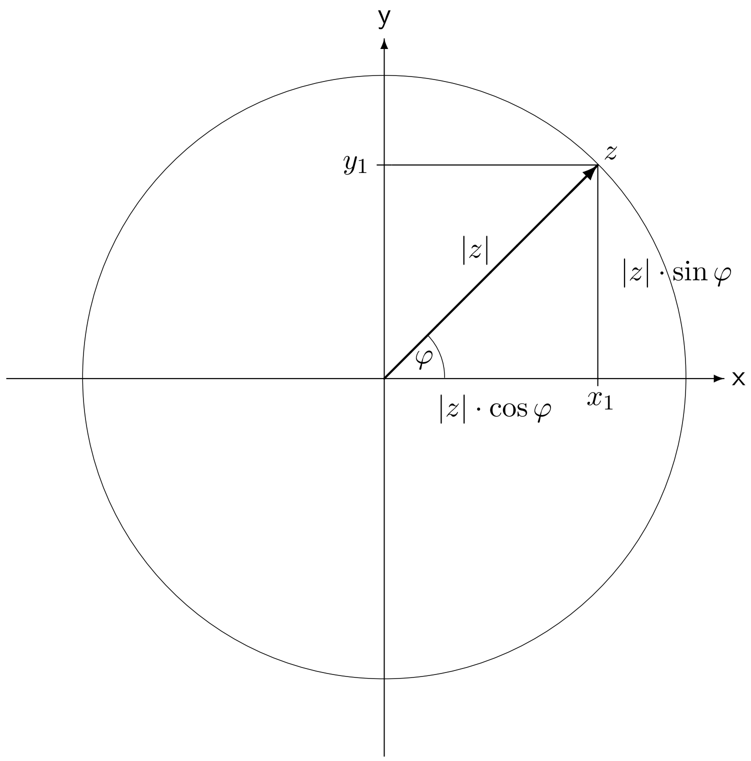
(auch Algebraische Darstellungsform)

$$z = x + iy \qquad x = \mathsf{Re}z \in \mathrm{R} \qquad y = \mathsf{Im}z \in \mathrm{R}$$



3.2.2. Trigonometrische Darstellung

$$z = \mathsf{Re}z + i\mathsf{Im}z$$
$$|z| = \sqrt{\mathsf{Re}z^2 + \mathsf{Im}z^2}$$



Trigonometrische Form:

$$z = x + iy = |z| \cdot \cos\varphi + i|z| \cdot \sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Definition: Den Winkel einer komplexen Zahl nennen wir Argument von z: arg$z := \varphi$.

Beispiel: Stelle $z = 1 + i$ in trigonometrischer Form dar.

$$|z| = \sqrt{1^2 + i^2} = \sqrt{2}$$
$$\text{arg}z = \varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad \text{(aus Geometrie)}$$
$$\Rightarrow \qquad z = 1 + i = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

Satz 24: Formel für φ

Es sei $z = x + iy$. Dann ist

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{falls } x > 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x} & \text{falls } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Beispiel:

$$x = 1 \qquad y = 1$$
$$\varphi = \arctan \tfrac{y}{x} = \arctan 1 = \tfrac{\pi}{4}$$

3.2.3. Polardarstellung

Satz 25: Eulersche Formel

Sei $a, \varphi, \psi \in \mathrm{R}$, so gilt

1. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
2. $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi}$
3. $e^{a+i\varphi} = e^{a} \cdot e^{i\varphi}$
4. $e^{n2\pi i} = 1$ für $n \in \mathrm{N}$

Beweis von 4.:

$$e^{n2\pi i} = \cos 2n\pi + i\sin 2n\pi = 1 + i \cdot 0 = 1$$

$\square$

Bemerkung: Für $n = 1$ gilt

$$e^{2\pi i} = 1 \qquad e^{2\pi i} - 1 = 0$$

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |z|e^{i\varphi}$$
$$z = re^{i\varphi} \qquad \text{mit } |z| = r$$

Rezept zum Umrechnen:

Karthesisch $\rightarrow$ Polar

1. Bestimme $|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2 + (\mathrm{Im}z)^2}$
2. Bestimme φ (siehe Satz 24, 3.2.2)
3. $\rightarrow z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (trigonometrisch)
4. $\rightarrow z = |z|e^{i\varphi}$ (polar)

Polar $\to$ Karthesisch:

$z = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = x + iy$

Bemerkung: e ist $2\pi i$-periodisch!

Multiplikation in der Polarform:

$$\begin{aligned}
&(1+i)(1+i) = 1 + 2i + i^2 = 2i \\
&\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = \\
&= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i\cdot 1) = 2i
\end{aligned}$$

Satz: Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen addieren sich deren Argumente und deren Beträge multiplizieren sich:

$$\begin{aligned}
&z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \\
&z_2 = r_2 \cdot e^{2\varphi_1} \\
&z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{2\varphi_1} = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_1)}
\end{aligned}$$

Wofür ist die Exponentialform gut?

1. Beim Potenzieren.
2. Beim Lösen von Polynomen der Form $p(z) = 0$.

Beispiele:

1. Stelle $z = -\sqrt{3} - i$ in Exponentialform dar.

$$\begin{aligned}
&|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\
&\varphi = \pi + \arctan\frac{y}{x} = \pi + \arctan\frac{-1}{-\sqrt{3}} = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi \\
&z = 2e^{i\frac{7}{6}\pi}
\end{aligned}$$

2. Bestimme die karthesische Form von $z = (-\sqrt{3} - i)^{100}$.

$$\begin{aligned}
&(-\sqrt{3} - i) = 2e^{i\frac{7}{6}\pi} \qquad \text{(siehe Aufgabe 1)} \\
&\left(-\sqrt{3} - i\right)^{100} = 2^{100}\left(e^{i\frac{7}{6}\pi}\right)^{100} = 2^{100}\left(e^{i\frac{700}{6}\pi}\right) = 2^{100}\left(e^{i(116+\frac{4}{6})\pi}\right) = \\
&= 2^{100}e^{i116\pi}e^{i\frac{4}{6}\pi} = 2^{100}e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2^{100}\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right) \\
&= 2^{100}\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i2^{100}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)
\end{aligned}$$

3.2.4. Polynome mit komplexen Koeffizienten

Satz 26: Fundamentalsatz der Algebra

Es sei p ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, dann hat die Gleichung

$$p(z) = 0$$

genau n Lösungen in C (unter Einbeziehung von vielfachen Nullstellen), wobei n der Grad des Polynoms p ist.

Beispiele:

1. $x^2 + 9 = 0$ hat 2 Lösungen $\left(x_1 = 3i,\, x_2 = -3i\right)$
2. $-\left(x^2\right)^2 + 9 = 0$ hat 2 Lösungen $\left(x_1 = 3i,\, x_2 = 3i,\, x_3 = -3i,\, x_4 = -3i\right)$
3. $-x^7 + 5x^3 + 17 = 0$ hat 7 Lösungen

Aufgabe (Klausur Wintersemester 2008/2009):

Bestimme die Menge aller komplexen Zahlen, für die gilt:

$$M = \left\{\ z \in \mathrm{C} \;\middle|\; \mathsf{Im}(z^2) = 2\ \right\}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 \\
&\mathsf{Im}(z^2) = \mathsf{Im}\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) = 2xy \\
&2xy = 2 \\
&xy = 1
\end{aligned}$$

$$M = \left\{\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; xy = 1\ \right\} = \left\{\ \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathrm{R}\backslash\{0\}\ \right\}$$

(Hyperbel, da $y = \frac{1}{x}$)

4. Vektorräume

4.1. Grundlagen

4.1.1. Definition

Definition 27: Vektorraum

Es sei $\mathrm{K} = \mathrm{R}$ oder C und V sei eine nichtleere Menge. Dann heißt V K-Vektorraum, falls

- zu je zwei Elementen $v, w \in V$ existiert $v + w \in V$ (Addition) und
- zu jedem $\alpha \in \mathrm{K}$ und $v \in V$ existiert $\alpha \cdot v \in V$ (Skalarmultiplikation).

Es gelten dann mit $u, v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathrm{K}$ die folgenden 8 Eigenschaften

1. Es existiert $0 \in V$ mit $0 + 0 = 0$ für alle $v \in V$ (Existenz des neutralen Elements bezüglich der Addition)
2. Zu jedem $v \in V$ existiert $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$ (Existenz des inversen Elements bezüglich der Addition)
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (Assoziativgesetz)
4. $u + v = v + u$ (Kommutativgesetz)
5. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (Distributivgesetz)
6. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
7. $(\alpha \cdot \beta)v = \alpha(\beta \cdot v)$
8. $1 \cdot v = v$ (Existenz des neutralen Elements bezüglich der Multiplikation)

Die Elemente eines Vektorraums V heißen Vektoren ($v \in V$).

Satz 28: Vektorraum der reellen Matrizen

Die Menge der $m \times n$-Matrizen ist ein Vektorraum über R.

Satz 29: Vektorraum der komplexen Matrizen

Die Menge der komplexen $m \times n$-Matrizen (d.h. $a_{ij} \in \mathrm{C}$, Einträge sind also komplexe Zahlen) ist ein Vektorraum über C mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation.

Definition 30: Vektorraum der $n \times 1$-Matrizen

Der Vektorraum der reellen $m \times 1$-Matrizen wird mit

$$\mathrm{R}^n$$

bezeichnet. Der Vektorraum der komplexen $m \times 1$-Matrizen wird mit

$$\mathrm{C}^n$$

bezeichnet.

Beispiele für Vektorräume:

- R, C
- R^n, C^n
- $m \times n$-Matrizen
- $V = \{f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} | f \text{ Funktion}\}$
- $V = \{(x_n)_{n \in \mathrm{N}} | x_n \to a\}$
- $V = \{p | p : \mathrm{C} \to \mathrm{C} \text{ Polynom}\}$
- ...

4.1.2. Linearkombination und Span

Definition 31: Linearkombination, Span und Erzeugendensystem

V ist Vektorraum über K, $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K}$. Dann heißt

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

Linearkombination und für eine Teilmenge M, $M \subset V$, heißt

$$\text{span} M := \left\{ \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \;\middle|\; \begin{array}{c} n \in \mathrm{N} \\ v_1, \ldots, v_n \in M \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K} \end{array} \right\}$$

„alle Linearkombinationen von Elementen aus M“

der lineare Span von M und M heißt Erzeugendensystem von span$M$.

Beispiel:

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{R}^3$$

4.2. Unterräume und Basen

4.2.1. Unterraum und Lineare Unabhängigkeit

Definition 32: Unterraum

V sei ein Vektorraum, $U \subset M$. U heißt (linearer) Unterraum (oder Untervektorraum), falls für alle $v, w \in U$ gilt:

$$v + w \in U$$
$$\alpha \cdot v \in U$$

Bemerkung: $M \subset V$, dann ist span$M$ Unterraum.

Definition 33: Lineare Unabhängigkeit

V sei ein Vektorraum. Die Menge $\{v_1, \ldots, v_k\}$ heißt linear abhängig, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ existieren mit

1. nicht alle α_j $(j = 1, \ldots, k)$ sind Null.
2. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$

   „nicht-triviale Linearkombination der Null“

Ansonsten nennen wir $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linear unabhängig.

Beispiele

1. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist linear unabhängig.
2. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\7\\1\end{pmatrix}\right\}$ ist linear abhängig.

Bemerkung: Im R^n ist jede Menge mit mehr als n Elementen linear abhängig.

Satz 34: Lineare Unabhängigkeit und Rang der Matrix

(Ermittlung der linearen Unabhängigkeit über Gaußverfahren)

$V = \mathrm{R}^n$ (oder C^n). $v_1, \ldots, v_k$ seien k Elemente aus V.

$\{v_1, \ldots, v_k\}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn rang$A =$ rang$\,(v_1, \ldots, v_k) = k$.

Beachte: rang$A \leq n$ und rang$A \leq k$.

4.2.2. Basis und Dimension

Definition 35: Basis

V sei ein Vektorraum. $B \subset V$ heißt Basis von V, falls gilt:

1. B ist ein Erzeugendensystem von V (d.h. span$B = V$).
2. B ist linear unabhängig.

Satz und Definition 36: Dimension

1. Es sei V ein Vektorraum. Dann hat V eine Basis. Besteht die Basis aus endlich vielen Elementen, so nennen wir V endlich dimensional, ansonsten unendlich dimensional.
2. Ist V endlich dimensional, so haben je zwei Basen dieselbe Anzahl von Elementen. Diese Anzahl nennen wir Dimension. Notation: $\dim V$.

Satz 37: Basiswechsel

Es sei V ein Vektorraum mit Dimension $n \in \mathrm{N}$. Es seien $B_{\text{alt}} = (e_1, e_2, \ldots e_n)$ und $B_{\text{neu}} = (f_1, f_2, \ldots f_n)$ zwei geordnete Basen von V. Dann lässt sich $v \in V$ schreiben als

$$p_1 e_1 + p_2 e_2 \ldots p_n e_n = V = q_1 f_1 + q_2 f_2 \ldots q_n f_n$$

(mit $p_1, \ldots p_n \in \mathrm{K}$ und $q_1, \ldots q_n \in \mathrm{K}$).

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}_{\text{alt}} \qquad \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}_{\text{neu}}$$

Dann gilt:

$$T \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}_{\text{neu}}$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}_{\text{alt}} = T^{-1} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}_{\text{neu}}$$

mit

$$T = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \gamma_{11}e_1 + \gamma_{21}e_2 + \ldots + \gamma_{n1}e_n && \text{(1. Spalte der Matrix)} \\ f_2 &= \gamma_{12}e_1 + \gamma_{22}e_2 + \ldots + \gamma_{n2}e_n && \text{(2. Spalte der Matrix)} \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ f_n &= \gamma_{1n}e_1 + \gamma_{2n}e_2 + \ldots + \gamma_{nn}e_n && \text{(n. Spalte der Matrix)} \end{aligned}$$

4.3. Lineare Abbildungen

4.3.1. Begriffe

Abbildung/Funktion:

A, B seien Mengen. Eine Vorschrift, die jedem Element $a \in A$ ein Element $b_a \in B$ zuordnet heißt Abbildung oder Funktion.

Notation: $f : A \mapsto B$ $(a \mapsto b_a,\ f(a) = b_a)$

„Hintereinanderausführung“ von Funktionen:

$f : A \mapsto B, g : B \mapsto C$. Dann definiert

$$g \circ f : A \mapsto C$$
$$a \mapsto (g \circ f)(a) := g(f(a))$$

die Hintereinanderausführung der Funktionen f und g.

4.3.2. Lineare Abbildungen

Satz 38: Lineare Abbildungen

Es seien V, W K-Vektorräumen und $L : V \mapsto W$ sei eine Funktion. Wir nennen L linear, falls für alle $x, y \in V$ und für alle $\lambda \in \mathrm{K}$ gilt:

1. $L(x+y) = L(x) + L(y)$
2. $L(\lambda x) = \lambda L(x)$

Notation: $L(x) := Lx$

Definition 39: Kern und Bild

Es seien V, W K-Vektorräumen und $L : V \mapsto W$ sei linear. Dann heißt

$$\ker L := \left\{ \, x \in V \;\middle|\; Lx = 0 \, \right\}$$

der Kern von L und

$$\operatorname{im} L := \left\{ \, Lx \;\middle|\; x \in V \, \right\}$$

das Bild von L.

Satz: $\ker L$ und $\operatorname{im} L$ sind Unterräume.

4.3.3. Matrixdarstellung

Satz 40: Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K. Wähle eine geeignete Basis $B = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. $L : V \mapsto V$ sei linear und $v \in V$ beliebiger Vektor mit

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$$

für geeignete $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{K}$ und

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad Lv = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_n v_n$$

für geeignete $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathrm{K}$.

Gilt für die $n \times n$-Matrix A (und für alle v)

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

so heißt A die darstellende Matrix von L bezüglich der Basis B.

Achtung: Nicht mit Basiswechsel verwechseln!

4.4. Eigenwerte und Eigenvektoren

4.4.1. Eigenwerte und Eigenvektoren

Exkurs: Was sind schöne Matrizen?

1. Null- und Einheitsmatrix (aber zu trivial):

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir hatten gesehen:

$$L : V \mapsto V \text{ (lineare Abbildung)} \underset{\text{mit gewisser Freiheit}}{\overset{\text{Wähle Basis}}{\leftrightarrow}} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Frage: Für welche $L : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}$ kann man die Basis so wählen, dass

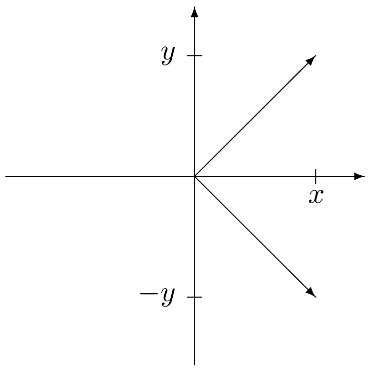
$$L : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{V} \underset{\text{geschickte Basis}}{\overset{\text{Wähle}}{\leftrightarrow}} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Funktioniert nicht immer!

Definition: Eine lineare Abbildung $L : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}$ (V endlichdimensionaler Vektorraum), heißt diagonalisierbar, wenn eine Basis von V existiert, so dass die darstellende Matrix (gemäß Satz 40) Diagonalmatrix ist.

Bemerkung: Oftmals ist $L : \mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{R}^n$ schon als Matrix bezüglich der kanonischen Basis dargestellt.

Beispiel: Spiegelung an der x-Achse



$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Le_1 = e_1 \qquad Le_2 = e_2$$

$$Le_1 = 1 \cdot e_1 \qquad Le_2 = (-1) \cdot e_2$$

Darstellende Matrix:

$$L\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\text{kanon}} = L(\alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha L e_1 + \beta L e_2 = \alpha 1 e_1 + \beta(-1)e_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ vergleiche mit } Le_1 = 1 \cdot e_1 \quad Le_2 = (-1) \cdot e_2 \text{(siehe oben)}$$

$\Rightarrow$ Suche $v \in \mathrm{V}$ mit $Lv = \lambda v$ und $\lambda \in \mathrm{K}$ ($= \mathrm{R}$ oder C).

Definition 41: Eigenvektoren und Eigenwerte

Ein Vektor $v \in \mathrm{V}$ heißt Eigenvektor einer linearen Abbildung $L : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}$, falls gilt:

1. Es existiert $Lv = \lambda v$ für $\lambda \in \mathrm{K}$.
2. $v \neq 0$

Wir nennen λ in diesem Fall Eigenwert von L mit Eigenvektor v.

Sei v Eigenvektor zum Eigenwert λ. Dann gilt:

$$\begin{aligned} Lv &= \lambda v \\ Lv - \lambda I v &= 0 \\ (L - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

(wobei $I = E =$ Identität/Einheitsmatrix)

Beobachtung: v ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \Leftrightarrow (L - \lambda I)v = 0$.

4.4.2. Eigenräume

Definition 42: Eigenräume und geometrische Vielfachheit

V ist ein Vektorraum über K, $L : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{V}$ lineare Abbildung, λ Eigenwert von L. Dann heißt

$$\mathrm{V}_\lambda = \ker(L - \lambda I) = \left\{ \; v \in \mathrm{V} \;\middle|\; (L - \lambda I)v = 0 \; \right\} = \left\{ \; v \in \mathrm{V} \;\middle|\; Lv = \lambda v \; \right\}$$

(„V_λ: Alle Eigenvektoren zu einem festen λ“)

Eigenraum von L zu λ. Die Dimension des Unterraums V_λ heißt die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ.

Berechnung der Eigenwerte

Wir beschränken uns auf Matrizen (dh. L ist eine Matrix).

Sei also A $n \times n$-Matrix. Gesucht $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathrm{K}^n$ (d.h. mit $\vec{v} \in \mathrm{R}^n$ oder C^n) mit $\vec{v} \neq 0$.

Rezept:

1. Bestimme alle Eigenwerte λ.
2. Bestimme alle zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}$.

Idee:

Gesucht λ, $\vec{v} \in \mathrm{K}^n$, $\vec{v} \neq 0$.

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ A\vec{v} - \lambda I\vec{v} &= 0 \\ \underbrace{(A - \lambda I)}_{B}\vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

B $n \times n$-Matrix, $B\vec{v} = 0$ mit $\vec{v} \neq 0$.

Ist $\det B \neq 0$, so wäre $B\vec{v} = 0$ eindeutig lösbar, also wäre nur $\vec{v} = \vec{0}$ eine Lösung, d.h. es gäbe keine Eigenwerte und Eigenvektoren.

Also suchen wir λ mit $\det B = \det(A - \lambda I) = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right| = \\ &= \left| \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}\lambda \end{pmatrix} \right| = p(x) \text{ (Polynom)} \end{aligned}$$

Satz: Die Eigenwerte (in C) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ der Matrix A sind genau die Nullstellen des Polynoms $p(x) = \det A - \lambda I$. Das heißt, wir suchen die Lösungen von $p(x) = \det A - \lambda I = 0$.

Die Vielfachheiten der Nullstelle λ_j, $j = 1 \ldots k$ heißt die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_j.

1. Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Plan:

1. Eigenwerte über $\det A - \lambda I = 0$ bestimmen.

2. Zu jedem Eigenwert den Eigenraum bestimmen, d.h. für Eigenwert λ_j berechne Basis von $V_{\lambda_j} = \ker(L - \lambda_j I)$.

Rechnung:

1. Eigenwerte

$$\det A - \lambda I = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 1 &= 0 \\ \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= -1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ zwei Eigenwerte, jeweils mit algebraischer Vielfachheit 1.

2. Eigenvektoren

a) zu $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_1 &= \ker(A - \lambda_1 I) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \quad \mathsf{I} + \mathsf{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Bemerkung: Es muss eine Nullzeile entstehen.

$$-x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y = t$$

$$\mathrm{V}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathrm{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Alle $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ für $t \neq 0$ sind Eigenvektoren für A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

b) zu $\lambda_2 = -1$

$$\mathrm{V}_{-1} = \ker(A - (-1)I) = \ker(A + I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$x + y = 0 \quad \Rightarrow y = -x \quad \Rightarrow \quad x = t$$

$$\mathrm{V}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathrm{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, Eigenvektoren für A zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

Weitere Rechnung: Wähle als Basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$: $A \overset{\text{(ohne Beweis)}}{\leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. A ist diagonalisierbar.

Beispiel 2:

1. Eigenwerte

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det\,(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 2.

2. Eigenvektoren

$$\mathrm{V} = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$$

$$\mathrm{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathrm{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathrm{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$, $\dim \mathrm{V} = 1$, geometrische Vielfachheit 1.

5. Skalarprodukt

5.1. Grundlagen

5.1.1. Definition

Definition 43: Skalarprodukt

Sei V ein Vektorraum über K. Die Abbildung $(\cdot,\cdot) : V \times V \mapsto \mathrm{K}$ heißt Skalarprodukt (inneres Produkt), falls für $u, v, w \in V$, $\lambda \in \mathrm{K}$ gilt:

1. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$
2. $(u, w) = \overline{(w, u)}$
3. $(u, u) \geq 0$ und $(u, u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$
4. $(\lambda u, w) = \lambda(u, w)$

Bemerkung: Für $\mathrm{K} = \mathrm{R}$ und $(\cdot,\cdot) : V \times V \mapsto \mathrm{K}$ gilt für 2. $(u, w) = (w, u)$

Beispiele:

1. R^n sei ein Vektorraum über R, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^n$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

2. C^n sei ein Vektorraum über C, $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathrm{C}^n$

$$\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right) = z_1 \overline{w_1} + z_2 \overline{w_2} + \ldots + z_n \overline{w_n}$$

Dann definiert für $v \in V$

$$||v|| := \sqrt{(v,v)}$$

eine Länge (oder Norm).

Im Fall $V = \mathrm{R}^n$ oder $V = \mathrm{C}^n$ mit dem Skalarprodukt wie oben, schreiben wir

$$|v| := \sqrt{(v,v)}$$

5.2. Norm, Winkel und Kreuzprodukt

5.2.1. Norm

Satz 44: Eigenschaften der Norm

Sei V ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt und $||v|| := \sqrt{(v,v)}$ $(v \in V)$.

1. Es gilt $||v|| \geq 0$ und $||u|| = \sqrt{(u,u)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0$.
2. Für $\alpha \in \mathrm{K}$ gilt $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$.
3. Für $v, w \in V$ gilt $||(v,w)|| \leq ||v|| \cdot ||w||$ (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).
4. Für $v, w \in V$ gilt $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (Dreiecksungleichung).

5.2.2. Winkel

Definition 45: Winkel zwischen zwei Vektoren

Sind $\vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{R}^n$, dann heißt

$$\alpha := \arccos \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Andere Schreibweise:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

Ist $\alpha = 90^\circ$ $(\alpha = \frac{\pi}{2})$, dann gilt $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$. In diesem Fall nennt man $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonal (senkrecht) zueinander.

Notation: $\vec{u} \perp \vec{v}$

5.2.3. Kreuzprodukt

Achtung: Kreuzprodukt ist nur im R^3 definiert.

Gegeben sind zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathrm{R}^n$. Das Kreuzprodukt ergibt den Vektor, der senkrecht auf den beiden steht.

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Dann gilt $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x}$ und $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y}$. Zudem gilt die „Rechte-Hand-Regel".

Anwendungen:

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathrm{R}^3$

1. $|\vec{b} \times \vec{c}| =$ Fläche des des von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms.

   Bemerkung: $|\vec{b} \times \vec{c}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig $\quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} = \alpha\vec{c}\,(\alpha \in \mathrm{R}) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} \parallel \vec{c}$

2. $\underbrace{|(\vec{a}, \vec{b} \times \vec{c})|}_{\text{„Spatprodukt"}} =$ Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipedes.

5.3. Abstand eines Vektors zu einem Vektorraum

5.3.1. Orthonormalbasis

Definition 46: Orthogonal- und Orthonormalbasis

Sei V ein Vektorraum über K mit Basis $\{b_1, \ldots b_n\}$ und Skalarprodukt.

1. $\{b_1, \ldots b_n\}$ heißt orthogonale Basis, falls $(b_i, b_j) = 0$ für alle $i, j = 1, \ldots n$.
2. $\{b_1, \ldots b_n\}$ heißt orthonormal, falls sie orthogonal ist und $||b_j|| = 1$, also $(b_j, b_j) = 1$ für alle $j = 1, \ldots n$. Das heißt, es gilt

$$(b_i, b_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Das Standardbeispiel:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Orthonormalbasis des R^3.

5.3.2. Orthogonale Matrizen

Definition 47: Orthogonale Matrizen

Eine $n \times n$-Matrix A mit den Spaltenvektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots \vec{a_n}$, $A = (\vec{a_1}\ \vec{a_2}\ \dots\ \vec{a_n})$ heißt orthogonale Matrix, wenn $\{\vec{a_1}, \dots \vec{a_n}\}$ eine Orthonormalbasis des R^n (bzw. C^n) ist.

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine orthogonale Matrix, da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Orthonormalbasis des R^3 ist.

5.3.3. Projektion auf Unterräume

Verfahren:

Gegeben ist ein Unterraum U von V (V Vektorraum über K mit Skalarprodukt).

1. Wähle eine Orthonormalbasis von U (über Gram-Schmidt-Verfahren):

$$\{b_1, \dots b_k\}$$

2. Definiere den orthonormalen Projektor von $\vec{v} \in V$ auf U mittels

$$P\vec{v} = (\vec{v}, \vec{b_1})\vec{b_1} + (\vec{v}, \vec{b_2})\vec{b_2} + \dots + (\vec{v}, \vec{b_n})\vec{b_n}$$

   $P\vec{v}$ ist die Projektion von $\vec{v}$ auf U.

Beobachtung: $P\vec{v}$ ist Linearkombination der Basisvektoren $\{b_1, \dots b_k\}$.

$$P\vec{v} \in \operatorname{span}\{b_1, \dots b_k\} = U$$

Satz 48: Abstand eines Vektors zu einem Unterraum

Es gilt für $\vec{v} \in V$

1. $P\vec{v} \in= U$ (vgl. Beobachtung)
2. $\vec{v} - P\vec{v} \perp \vec{u}$ für alle $\vec{u} \in U$
3. Der minimale Abstand von $\vec{v}$ zu U ist gegeben durch

$$\underbrace{\min \overbrace{||\vec{v} - \vec{u}||}^{\text{Abstand } \vec{v} \text{ zu } \vec{u}}}_{\text{kleinster Abstand } \vec{v} \text{ zu } U} = ||\vec{v} - P\vec{v}||$$

5.4. Spezielle Klassen von Matrizen

5.4.1. Symmetrische Matrizen

Bisher:

- Diagonalmatrizen
- Dreiecksmatrizen
- Orthogonale Matrizen (Spalten bilden eine Orthonormalbasis)

Definition 49: Symmetrische Matrizen

A sei eine $n \times n$-Matrix. A heißt symmetrisch, falls für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathrm{R}^n$ (bzw. C^n) gilt:

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, A\vec{w})$$

Satz 50: Eigenschaften von symmetrischen Matrizen

1. A symmetrische Matrix in $\mathrm{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad A = A^T$.
2. Alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix sind reell.
3. Algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes einer symmetrischen Matrix ist gleich der geometrischen Vielfachheit.
4. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

5.4.2. Diagonalisierbarkeit

Satz 51: „The end of the saga“

Es existiert für eine symmetrische Matrix eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Übersicht

V ist endlichdimensionaler Vektorraum über K.

$(e_1, e_2, \ldots e_n)$ ist geordnete (alte) Basis von V.

$(g_1, g_2, \ldots g_n)$ ist geordnete (neue) Basis von V.

Zusammenhang: $T \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\text{alt}}$

$L : V \mapsto V$ lineare Abbildung mit

$$v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\text{alt}} \qquad Lv \leftrightarrow \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}_{\text{alt}}$$

Darstellende Matrix:

$$A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}_{\text{alt}}$$

Daher gilt auch:

$$\begin{aligned} AT\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}_{\text{neu}} &= T\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}_{\text{neu}} \\ T^{-1}AT\begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}_{\text{neu}} &= \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix}_{\text{neu}} \end{aligned}$$

$T^{-1}AT$ ist die darstellende Matrix von L bezüglich der neuen Basis $(g_1, \ldots g_n)$.

L ist diagonalisierbar, falls eine Basis existiert, so dass die darstellende Matrix Diagonalgestalt hat. $\Leftrightarrow \exists$ neue Basis mit

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$$

Satz: L ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren von L.

Folgerung aus Satz 51

Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar!

Vorgehen

Gegeben L mit darstellender Matrix A.

1. **Eigenwerte:** Bestimme alle Nullstellen von $0 = \det(A - \lambda I)$: $\lambda_1, \ldots \lambda_k$. Die Ordnung der Nullstellen ergibt die algebraische Vielfachheit.
2. **Eigenvektoren:** Zu $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ bestimme die Eigenvektoren als Basis von $\ker(A - \lambda_1)$, $\ker(A - \lambda_2)$, $\ldots \ker(A - \lambda_k)$. $\dim \ker(A - \lambda_k)$ ergibt die geometrische Vielfachheit von λ_k.
3. A ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ algebraische Vielfachheit λ_j = geometrische Vielfachheit λ_j für $j = 1, 2, \ldots k$.

„algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit“

Teil II.

Analysis

6. Folgen

6.1. Zahlen und Intervalle

6.1.1. Zahlen

N	Natürliche Zahlen
Z	Ganze Zahlen
Q	Rationale Zahlen
R	Reelle Zahlen
C	Komplexe Zahlen

6.1.2. Notation von Intervallen

(a, b)	$:= \{x \in \mathrm{R} \vert a \leq x \leq b\}$	(offenes Intervall)
$[a, b]$	$:= \{x \in \mathrm{R} \vert a \leq x \leq b\}$	(abgeschlossenes Intervall)
$[a, b)$	$:= \{x \in \mathrm{R} \vert a \leq x \leq b\}$	(halboffenes Intervall)
$(a, b]$	$:= \{x \in \mathrm{R} \vert a \leq x \leq b\}$	
$(-\infty, a)$	$:= \{x \in \mathrm{R} \vert x \leq a\}$	
$[a, \infty)$	$:= \{x \in \mathrm{R} \vert x \geq a\}$	

6.2. Folgen

6.2.1. Grundlagen

Beispiele:

- $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \ldots$

Notation: $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ wobei $x_n \in \mathrm{R}$ für alle $n \in \mathrm{N}$.

Beispiele:

- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \qquad x_n = \frac{1}{2^n} \quad (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathrm{N}}$
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \qquad x_n = \frac{1}{n} \quad (\frac{1}{n})_{n\in\mathrm{N}}$
- $1, -4, 9, -16, 25 \dots \qquad x_n = (-1)^{n+1} \cdot n^2 \quad ((-1)^{n+1} \cdot n^2)_{n\in\mathrm{N}}$

Fibonacci-Folge (Kaninchenpopulation)

$$\begin{array}{ll}
x_1 & 1 \\
x_2 & 1 \longrightarrow 1 \\
x_3 & 2 \longrightarrow 1 \\
x_4 & 3 \longrightarrow 2 \\
x_5 & 5 \longrightarrow 3 \\
x_6 & 8 \longrightarrow 5 \\
x_7 & 13 \longrightarrow 8 \\
\vdots & \quad\vdots
\end{array}$$

Fibonacci-Folge: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$

Rekursive Definition: $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ für $n > 1$ mit $x_1 = 1,\ x_2 = 1$.

6.2.2. Konvergenz und Divergenz

Definition 52: Konvergenz gegen Null

Wir sagen, dass $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ gegen Null konvergiert, falls für jedes Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (mit $\varepsilon > 0$) um Null ab einem Index N_0 alle x_n innerhalb dieses Intervalls liegen.

Notation:

$$x_n \to 0 \quad n \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Beachte: N_0 hängt von ε ab ($N_0 = N_0(\varepsilon)$. D. h. erst ε wählen, und dann $N_0(\varepsilon)$.

Also existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathrm{N}$ mit

$$x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ für alle } n \geq N_0$$
$$\text{bzw. } |x_n - 0| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_0$$

Definition 53: Konvergenz gegen einen beliebigen Wert

Wir sagen $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ konvergiert gegen a ($a \in \mathrm{R}$), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathrm{N}$ existiert, für dass gilt

$$x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \text{ für alle } n \geq N_0$$
$$\text{bzw. } |x_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_0$$

Notation:

$$x_n \to a \quad n \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Satz 54: „Großer Grenzwertsatz“

Es seien (x_n), (y_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathrm{R}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \in \mathrm{R}$. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$ (Die Summe konvergenter Folgen ist wieder konvergent.)
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = a \cdot b$ (Das Produkt konvergenter Folgen ist wieder konvergent.)
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{a}{b}$ falls $y_n \neq 0$ und $b \neq 0$ (Der Quotient konvergenter Folgen ist wieder konvergent, sofern keine Division durch Null vorliegt.)
4. Gilt $(x_n) \leq (y_n)$ für alle $n \in \mathrm{N}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \leq b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Bemerkung: Es gilt nicht $x_n < y_n \quad \Rightarrow \quad a < b$, sondern nur $x_n \leq y_n \quad \Rightarrow \quad a \leq b$.

Definition 55: Bestimmte Divergenz

Die Folge $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ („ε ist jetzt groß“) ein $N_0 \in \mathrm{N}$ existiert mit $x_n \geq \varepsilon$ für alle $n \geq N_0$ (bzw. mit $x_n \leq \varepsilon$ für alle $n \leq N_0$).

Notation:

$$x_n \to \infty \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Achtung: Der Grenzwertsatz gilt nicht für bestimmt divergente Folgen ($x_n \to \infty$)!

Satz 56: Intervallschachtelung

Es sei (y_n) eine Folge und I_n (mit $n \in \mathrm{N}$) sei ein nichtleeres Intervall mit mit Randpunkten a_n und b_n, $a_n \leq b_n$.

Es gelte

$$y_n \in I_n \qquad I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset I_5 \supset \ldots \supset I_n \qquad \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$$

Dann gilt: Es liegt genau ein Punkt $v \in \mathrm{R}$ in allen Intervallen $p \in I_N$ für alle $n \in \mathrm{N}$ und die Folge $(y_n)_n$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = p$$

Bemerkung:

1. Satz 56 beschreibt eine besondere Eigenschaft der reellen Zahlen („Vollständigkeit“).
2. Wegen Satz 56 gilt: Alle Zahlen mit beliebiger Dezimaldarstellung liegen in R.

Binomischer Satz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \begin{cases} 0 & k > n \\ \frac{n!}{k!(n-k)!} & k \leq n \end{cases} \\ n! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

6.2.3. Monotonie

Satz 57: Satz von Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte, monotone Folge (x_n) reeller Zahlen ist konvergent.

(x_n) heißt beschränkt, falls m, M ex. mit $m \leq x_n \leq M$ für alle $n \in \mathrm{N}$.

Monotonie:

(x_n) heißt

- monoton wachsend, falls $x_n \leq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathrm{N}$,
- streng monoton wachsend, falls $x_n < x_{n+1}$ für alle $n \in \mathrm{N}$,
- monoton fallend, falls $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \in \mathrm{N}$,
- streng monoton fallend, falls $x_n > x_{n+1}$ für alle $n \in \mathrm{N}$,
- monoton, falls (x_n) monoton fallend oder monoton wachsend.

7. Differentiation

7.1. Grenzwerte und Stetigkeit

7.1.1. Grenzwerte

Definition 58: Grenzwert

$f : D \mapsto \mathrm{R}$, $D \subset \mathrm{R}$, $x^* \in \mathrm{R}$.

Es gelte:

Es existiert mindestens eine Folge $(\tilde{x}_n)$ mit $\tilde{x}_n \in D$ und $\tilde{x}_n \mapsto x^*$, $\tilde{x}_n \neq x^*$.

Für alle Folgen (x_n) (d. h. $x_n \in D$, $x_n \mapsto x^*$, $x_n \neq x^*$) gilt

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ existiert.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y^*$ (also immer derselbe Grenzwert).

Notation:

$$\lim_{x\to x^*} f(x) = y^*$$

Bemerkung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ wird analog definiert.

Definition 59: Linksseitiger und Rechtsseitiger Grenzwert

$f : D \mapsto \mathrm{R}$, $D \subset \mathrm{R}$, $x^* \in \mathrm{R}$ mit

1. Es existiert eine Folge $(\tilde{x}_n)$ mit $\tilde{x}_n \in D$ und $\tilde{x}_n \mapsto x^*$, $\tilde{x}_n \neq x^*$.
2. a) Für alle solche Folgen (x_n) mit $x_n < x^*$ (dh. $x_n \mapsto x^*$ und $x_n \in D$) gilt

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ existiert und } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y^*$$

   b) Für alle solche Folgen (x_n) mit $x_n > x^*$ (dh. $x_n \mapsto x^*$ und $x_n \in D$) gilt

   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \text{ existiert und } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = z^*$$

Gilt 1. und 2. a), so hat f einen linksseitigen Grenzwert in x^*. Gilt 1. und 2. b), so hat f einen rechtsseitigen Grenzwert in x^*.

Notation:

- Linksseitig:

$$\lim_{x \to x^*-} f(x) = \lim_{x \to x^*-0} f(x) = \lim_{x \nearrow x^*} f(x) = y^*$$

- Rechtsseitig:

$$\lim_{x \to x^*+} f(x) = \lim_{x \to x^*+0} f(x) = \lim_{x \searrow x^*} f(x) = z^*$$

Satz:

Existiert der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert, und stimmen diese überein ($y^* = z^*$), so existiert der Grenzwert von f in x^*:

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = y^* = z^*$$

7.1.2. Stetigkeit

Definition 60: Stetigkeit

$f : D \mapsto \mathrm{R}$, $D \subset \mathrm{R}$, $x^* \in D$

f heißt stetig in x^*, falls gilt:

$$\lim_{x \to x^*} f(x) = f(x^*)$$

Denn es gilt auch:

$$\lim_{x \to x^*-} f(x) = \lim_{x \to x^*+} f(x) = f(x^*)$$

Ist f stetig für alle $x^* \in D$, so heißt f stetig in D.

Rechenregeln:

- Die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von stetigen Funktionen ergibt eine stetige Funktion.
- Alle Polynome sind stetig.
- Die Verknüpfung zweier stetiger Funktionen ($f \circ g$) ist stetig.
- $\sin$, $\cos$, $\ldots$ sind stetig.
- $\sqrt{\ldots}$ sind stetig.

Satz 61: Zwischenwertsatz

$f : [a, b] \mapsto \mathrm{R}$ stetig mit $f(a) \leq y^* \leq f(b)$. Dann existiert $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) = y^*$.
$\rightarrow$simples numerisches Verfahren zur Nullstellenbestimmung

7.2. Extremwerte

7.2.1. Infinimum und Supremum

Definition 62: Infinimum und Supremum

$f : D \mapsto \mathrm{R}$

$y^* \in \mathrm{R}$ heißt Supremum von f, falls y^* die kleinste reelle Zahl ist, für die gilt:

$$y^* \geq f(x)$$

(„kleinste obere Schranke“)

Notation: $\sup f(x) = y^* \qquad x \in \mathrm{R}$

$z^* \in \mathrm{R}$ heißt Infinimum von f, falls z^* die größte reelle Zahl ist, für die gilt:

$$z^* \leq f(x)$$

(„größte untere Schranke“)

Notation: $\inf f(x) = z^* \qquad x \in \mathrm{R}$

7.2.2. Minima und Maxima

Definition 63: Minima und Maxima

$f : D \mapsto \mathrm{R}$

Gilt $\sup f(x) = f(x^*)$ so schreibt man

$$\max f(x) = f(x^*) \qquad x \in \mathrm{R}$$

und sagt: f nimmt ein Maximum an.

Gilt $\inf f(x) = f(x^*)$ so schreibt man

$$\min f(x) = f(x^*) \qquad x \in \mathrm{R}$$

und sagt: f nimmt ein Minimum an.

Satz 64: Extremwerte und Stetigkeit

$f : [a, b] \mapsto \mathrm{R}$ sei stetig.

Dann nimmt f sein Maximum und Minimum an.

7.3. Differentiation

7.3.1. Definition

Definition 65: Differentiation

I Intervall, $x_0 \in I$

$f : I \mapsto \mathrm{R}$ heißt in x_0 differenzierbar, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.

Notation: $f'(x_0)$

Satz 66: Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Eine differenzierbare Funktion $f : I \mapsto \mathrm{R}$ ist stetig in I.

7.3.2. Rechenregeln

$f, g : I \mapsto \mathrm{R}$ seien differenzierbar auf I. Dann gilt:

1. $f + g$ ist differenzierbar auf I:

$$(f + g)' = f' + g'$$

2. αf für $\alpha \in \mathrm{R}$ ist differenzierbar auf I:

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

3. $f \cdot g$ ist differenzierbar auf I:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

4. $\frac{f}{g}$ für $g \neq 0$ ist differenzierbar auf I:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

5. Gilt für $f : I \mapsto J$ und für $g : J \mapsto \mathrm{R}$, dann ist $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ differenzierbar auf I:

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

7.3.3. Die Umkehrfunktion

Definition 67: Umkehrfunktion

$f : A \mapsto B$, $g : B \mapsto A$

Wenn gilt

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x \qquad \text{für alle } x \in A$$

dann heißt g Umkehrfunktion von f und f invertierbar.

Notation: $g := f^{-1}$

Satz 68: Ableitung der Umkehrfunktion

$f : I \mapsto J$ differenzierbar und invertierbar. I, J reelle Intervalle. $g := f^{-1} : J \mapsto I$. Ist $f'\big(g(x)\big) \neq 0$, so ist f^{-1} differenzierbar:

$$\left(f^{-1}\right)' = g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)}$$

7.3.4. Injektivität und Surjektivität

Definition 69: Injektivität und Surjektivität

$f : A \mapsto B$ (mit A, B Mengen) heißt

1. injektiv, falls $f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt.
2. surjektiv, falls zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ existiert.

Bemerkung: f surjektiv, dann gilt auch: $\{f(x) | x \in A\} = B$.

Definition 70: Bijektivität

Ist f injektiv und surjektiv, so nennen wir f bijektiv.

Bemerkung: Betrachte $B \ni b \mapsto a = f^{-1}(b)$. f sei bijektiv. Mit $f(a) = b$ gilt auch $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$.

Also gilt: Ist f bijektiv, so ist f invertierbar, und andersherum.

7.3.5. Die Arkusfunktionen

	$\sin : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$	$\cos : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$	$\tan : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$
injektiv	nein	nein	nein
surjektiv	nein	nein	ja

Daher setze:

- $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto [-1, 1]$
- $\cos : [0, \pi] \mapsto [-1, 1]$
- $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mapsto \mathrm{R}$

Dann sind diese Intervalle bijektiv und somit invertierbar:

$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$
Arkussinus	Arkuskosinus	Arkustangens
$\arcsin : [-1, 1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\arccos : [-1, 1] \mapsto [0, \pi]$	$\arctan : \mathrm{R} \mapsto (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Satz 71: Ableitung der Arkusfunktionen

$$\begin{aligned}
\Big(\arcsin x\Big)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für} \quad x \in (-1, 1) \\
\Big(\arccos x\Big)' &= \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für} \quad x \in (-1, 1) \\
\Big(\arctan x\Big)' &= \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für} \quad x \in \mathrm{R}
\end{aligned}$$

7.4. Konsequenzen aus der Differentiation

7.4.1. Globale Minima und Maxima

Definition 72: Globale Extremwerte

$f : I \mapsto \mathrm{R}$, I Intervall.

Ist $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I$, so nimmt f in x_0 sein globales Maximum an.

Globale Minima werden analog definiert.

Bemerkung:

1. Globale Minima/Maxima sind auch lokale Minima/Maxima.
2. Es sind auch mehrere globale Minima/Maxima möglich (vlg. $\sin$).

Satz 72a: Ableitung und Extremwerte

Nimmt eine differenzierbare Funktion ihr Minimum bzw. Maximum in einem inneren Punkt ihres Definitionsbereichs an, so ist ihre Ableitung dort 0.

Notation: f sei n-mal differenzierbar:

$f^{(n)}$ oder $\frac{d^n f}{dx^n}$ bezeichnet die n-te Ableitung.

Satz 73: Ableitung, Extremwerte und Sattelpunkte

$f : I \mapsto \mathrm{R}$ sei (mindestens) n-mal differenzierbar. x_0 sei ein innerer Punkt von I und es gelte:

$$\begin{aligned} & f'(x_0) = 0 = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ & f^{(n)}(x_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Dann gilt, falls:

1. n ungerade:

   f hat in x_0 keinen Extremwert, sondern einen Sattelpunkt (Terassenpunkt).

2. n gerade:

   a) $f^{(n)}(x_0) > 0$:

      f hat in x_0 ein lokales Minimum.

b) $f^{(n)}(x_0) < 0$:

f hat in x_0 ein lokales Maximum.

Bemerkung: Satz 72/72a ist eine notwendige, Satz 73 dagegen eine hinreichende Bedingung für Extremwerte im Inneren von.

Rezept zur Bestimmung von lokalen/globalen Extrema

$f : I \mapsto \mathrm{R}$

1. Bestimme alle x mit $f'(x) = 0$.
2. Finde mittels Satz 73 heraus, welche davon Sattelpunkte und welche Extrema sind.

   $\rightarrow x_1, \ldots x_n$ aus dem Inneren von I sind damit Extremwerte.
3. Betrachte die Randpunkte, ggf. befinden sich dort ebenfalls lokale Extremwerte.
4. Der Vergleich von 2., 3. und dem Verhalten von f am Rand von I liefert die globalen Minima/Maxima.

7.4.2. Der Mittelwertsatz

Satz 74: Mittelwertsatz

Sei $f : I \mapsto \mathrm{R}$ differenzierbar, I Intervall, $a, b \in I$ und $a \neq b$. Dann existiert ein $\varsigma \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varsigma)$$

Satz 75: Schrankensatz

Ist $|f'(x)| \leq M$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt:

$$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a)$$

7.4.3. Monotonie

Satz 76: Monotonieverhalten

Es sei $f : I \mapsto \mathrm{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I$$

so ist f streng monoton wachsend ($f(x) > f(y)$ falls $x > y$). Analog gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &\geq 0 \text{ für alle } x \in I \to f \text{ ist monoton wachsend.}\\
f'(x) &< 0 \text{ für alle } x \in I \to f \text{ ist streng monoton fallend.}\\
f'(x) &\leq 0 \text{ für alle } x \in I \to f \text{ ist monoton fallend.}
\end{aligned}$$

Satz 77: Ableitung von konstanten Funktionen

$f : I \mapsto \mathrm{R}$, I Intervall. Sei $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f konstant.

7.4.4. Regel von L' Hospital

Satz 78: Regel von L'Hospital

$f, g : I \mapsto \mathrm{R}$, I Intervall, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.

Es sei $x_0 \in \mathrm{R}$ oder $x_0 = \infty$ oder $x_0 = -\infty$ mit

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert oder $= \infty$ oder $= -\infty$.

Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

7.5. Taylorapproximation

7.5.1. Die Taylorformel

Satz 79: Die Taylorformel

$f : I \mapsto \mathrm{R}$, n-mal differenzierbar, I Intervall, $x_0 \in I$.

Dann gilt:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{\text{Taylorpolynom } T_n(x)} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Restglied}}$$

mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

und falls f $(n-1)$-mal differenzierbar ist, so existiert $\varsigma \in (x, x_0)$ bzw. $\varsigma \in (x_0, x)$ mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varsigma)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Taylorpolynom ohne Summenschreibweise:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Notation:

- x_0 Entwicklungspunkt.
- Restglied $R_n(x)$ wird auch als $R_{n,f,x_0}(x)$ geschrieben.
- Analog Taylorpolynom $T_n(x)$ auch als $T_{n,f,x_0}(x)$.

Oftmals interessiert der Absolutbetrag des Approximationsfehlers:

$$|f(x) - T_n(x)| = \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right| = |R_n(x)|$$

7.5.2. Die Exponentialfunktion

Satz 80: Definition der Exponentialfunktion

Es gibt genau eine differenzierbare Funktion $y : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$ mit

$$y'(x) = y(x) \quad \text{und} \quad y(0) = 1 \qquad x \in \mathrm{R}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung dieser Gleichung nennen wir Exponentialfunktion $\exp$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &\exp : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R} \\ &e := \exp(1) \qquad (e\text{: Eulersche Zahl}) \end{aligned}$$

Satz 81: Eigenschaften der Exponentialfunktion

Es gilt:

1. $(\exp x)' = \exp x$, $\exp : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$ ist ∞-oft differenzierbar.
2. $\exp 0 = 1$
3. $\exp x \neq 0$ für alle $x \in \mathrm{R}$
4. $\exp(x + y) = (\exp x) \cdot (\exp y)$
5. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
6. $\exp$ ist streng monoton wachsend
7. $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$
8. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Notation:

$$\begin{aligned} &\exp x = e^x \\ &\exp 0 = e^0 = 1 \\ &\exp(a + b) = e^{a+b} = e^a \cdot e^b = \exp a \cdot \exp b \end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} \overset{''\frac{\infty}{\infty}''}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = \ldots = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{n!} = \infty$$

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom!

7.5.3. Umkehrung der Exponentialfunktion: Der Logarithmus

$\exp : \mathrm{R} \mapsto (0, \infty)$

$\exp$ ist injektiv, denn die Funktion ist streng monoton wachsend (für $x_1 \neq x_2$ gilt $x_1 < x_2$ oder $x_2 < x_1$, also gilt auch $\exp x_1 < \exp x_2$ bzw. $\exp x_2 < \exp x_1$).

Zudem ist $\exp$ surjektiv (siehe Satz 81, 7. und 8.).

Also ist $\exp : \mathrm{R} \mapsto (0, \infty)$ bijektiv und somit invertierbar.

Notation: $(\exp)^{-1} =: \ln$ mit $\ln : (0, \infty) \mapsto \mathrm{R}$

$\ln(\exp x) = x \qquad x \in \mathrm{R}$

$\exp(\ln x) = x \qquad x \in (0, \infty)$

Satz 82: Eigenschaften der Logarithmusfunktion

Es gilt:

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
2. $\ln 1 = 0$
3. $\ln ab = \ln a + \ln b \qquad a, b > 0$

Der komplexe Kosinus

Es gilt

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

und daher der komplexe Kosinus: $\cos : \mathrm{C} \mapsto \mathrm{C}$

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

und analog den komplexen Sinus: $\sin : \mathrm{C} \mapsto \mathrm{C}$

$$\sin z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i}$$

8. Integration

8.1. Grundlagen

8.1.1. Definition

Definiere: F_n: Summer aller Rechtecke $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$

$$F_n := \sum_{j=1}^{n} F(x_j)\Delta_n$$

Satz 83: Existenz des Integrals

Sei $f : [a, b] \mapsto \mathrm{R}$ stetig oder monoton. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} F_n = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Definition: $f : [a, b] \mapsto \mathrm{R}$ heißt stückweise stetig oder stückweise monoton, falls gilt

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup \ldots \cup [x_{n-1}, b]$$

mit $a = x_0$ und $b = x_n$ und $f : (x_{j-1}, x_j$ mit $j = 1 \ldots n$ mit

$$f_j(x) = f(x)$$

sind stetig bzw. monoton. In diesem Fall definiere:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx + \ldots + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f_n(x)dx$$

Definition: f wie in Satz 83 oder wie in der obigen Funktion angegeben heißt integrierbar.

8.1.2. Integrationsregeln

$f, g : [a,b] \mapsto \mathrm{R}$, integrierbar, $\lambda \in \mathrm{R}$.

1. $\int_a^b f(x)dx + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
3. $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad a < c < b$
6. Gilt $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt:

   $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$

Bemerkung: Die Integration ist eine lineare Abbildung (vgl. 1 + 2)!

8.1.3. Sätze über die Integration

Satz 84: Folgerung aus den Integrationsregeln

$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Satz 85: Mittelwertsatz der Integralrechnung

$f : [a,b] \mapsto \mathrm{R}$ stetig. Dann existiert ein $\varsigma \in [a,b]$ mit

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(\varsigma)$$

Definition:

$$\int_a^b f(x)dx =: -\int_b^a f(x)dx$$

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

Satz 86: Funktion und Stammfunktion

F ist differenzierbar. $F' = f$ (mit $F : [a, b] \mapsto \mathrm{R}$).

Definition: $G : I \mapsto \mathrm{R}$, differenzierbar, heißt Stammfunktion von f, falls gilt:

$$G' = f$$

Es gilt:

- Stetige Funktionen haben eine Stammfunktion.
- Stammfunktionen sind bis auf eine Konstante eindeutig.

Satz 87: Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$f : I \mapsto \mathrm{R}$ stetig, I Intervall, $a \in I$. Dann gilt:

1. $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ ist Stammfunktion von f (d.h. F ist differenzierbar, $F' = f$ (vgl. Satz 86).
2. G sei beliebige Stammfunktion, dann gilt $G = F + \mathrm{const.}$
3. $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) =: G(x)\Big|_a^b$

Beispiele:

1. $$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

2. $$\int_1^5 \frac{dx}{x} = \int_1^5 \frac{1}{x} dx = \ln x\Big|_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

8.2. Integrationsverfahren

8.2.1. Integration durch Substitution

$f : [a,b] \mapsto \mathrm{R}$ stetig, $g : [a,b] \mapsto \mathrm{R}$ differenzierbar, g' stetig, g streng monoton. Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\Big(g(t)\Big) \cdot g'(t)dt$$

Beispiele:

1. Bestimme:

$$\int_1^7 \frac{dx}{(5x-2)^3} =$$

$$\begin{aligned} t &= 5x-2 \\ dt &= 5dx \\ \tfrac{1}{5}dt &= dx \end{aligned} \qquad \begin{array}{c|c} x & t \\ \hline 1 & 3 \\ 7 & 33 \end{array}$$

$$= \int_3^{33} \frac{1}{t^3} \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int_3^{33} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{5}\Big[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2}\Big]_3^{33} = -\frac{1}{10}\Big[\frac{1}{t^2}\Big]_3^{33} =$$
$$= -\frac{1}{10}\Big(\frac{1}{33^2} - \frac{1}{3^2}\Big) = \frac{4}{363}$$

2. Bestimme die Stammfunktion:

$$\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx =$$

$$\begin{aligned} t &= e^x - 1 \\ dt &= e^x dx \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \ln t + \text{const.} =$$

Rücksubstitution:

$$= \ln(e^x - 1) + \text{const.}$$

8.2.2. Partielle Integration

u, v differenzierbar, u', v' stetig auf $[a, b]$

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)dx = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx$$

Beispiel:

Bestimme:

$$\int_0^\pi (x+1)\sin x dx$$

$$\begin{array}{ll} v(x) = x+1 & v'(x) = 1 \\ u'(x) = \sin x & u(x) = -\cos x \end{array}$$

$$\int_0^\pi (\underbrace{x+1}_{v})\underbrace{\sin x}_{u'} dx = \underbrace{(x+1)}_{v}\underbrace{(-\cos x)}_{u}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \underbrace{1}_{v'}(\underbrace{-\cos x}_{u})dx =$$
$$= (\pi+1)(-(-1)) - (1(-1)) + \sin x\Big|_0^\pi = \pi + 1 + 1 + 0 = \pi + 2$$

8.2.3. Integration komplexwertiger Funktionen

$f : [a, b] \mapsto \mathrm{C}$, $f(x) = \mathrm{Re} f(x) + i\mathrm{Im} f(x)$

$\mathrm{Re} f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x) + \overline{f(x)}\Big) =: u(x)$

$\mathrm{Im} f(x) = \frac{1}{2i}\Big(f(x) - \overline{f(x)}\Big) =: v(x) \qquad u, v : [a, b] \mapsto \mathrm{R}$

$f(x) = u(x) + iv(x)$

Definition:

$$\mathrm{C} \ni \int_a^b f(x)dx := \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx$$

wobei $u(x) = \mathrm{Re} f(x)$ und $v(x) = \mathrm{Im} f(x)$.

8.2.4. Partialbruchzerlegung

Wenn p und q Polynome sind, so heißt $\frac{p}{q}$ rationale Funktion. Mittels Partialbruchzerlegung lassen sich alle rationalen Funktionen integrieren.

Rezept

1. Polynomdivision (falls $\mathrm{grad}\ p \geq \mathrm{grad}\ q$)
2. Partialbruchzerlegung
   a) Bestimme die Nullstellen von q.
   b) Ansatz als Summe der einzelnen Nullstellen:
      - **Regel 1:** x_0 reelle Nullstelle 1. Ordnung: $\frac{A}{x-x_0}$
      - **Regel 2:** $a+ib$ nicht-reelle Nullstelle 1. Ordnung: $\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}$
      - **Regel 3:** x_0 reelle Nullstelle 2. Ordnung: $\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2}$
      - **Regel 4:** $a+ib$ nicht-reelle Nullstelle 2. Ordnung: $\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Cx+D}{\big((x-a)^2+b^2\big)^2}$
      - **Regel 5:** x_0 reelle Nullstelle 3. Ordnung: $\frac{A}{x-x_0} + \frac{B}{(x-x_0)^2} + \frac{C}{(x-x_0)^3}$
      - **Regel 6:** $a+ib$ nicht-reelle Nullstelle 3. Ordnung: $\frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2} + \frac{Cx+D}{\big((x-a)^2+b^2\big)^2} + \frac{Ex+F}{\big((x-a)^2+b^2\big)^3}$
      - ...

   c) Multiplikation mit dem Hauptnenner
   d) Koeffizientenvergleich
3. Integration

Bemerkung zu den komplexen Nullstellen:

$a+ib$ sei Nullstelle $\Rightarrow a-ib$ ist Nullstelle. Zusammengefasst ergibt sich:

$$\Big(x-(a+ib)\Big)\Big(x-(a-ib)\Big) = \Big((x-a)+ib\Big)\Big((x-a)-ib\Big) = (x-a)^2+b^2$$

Beispiel:

$$\int \frac{5x^2-4x+7}{(x-1)^2(x+3)}dx$$

Nullstellen des Nennerpolynoms: $x=1$ (doppelt) und $x=-3$

Ansatz:

$$\frac{5x^2-4x+7}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+3}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner: $\cdot(x-1)^2(x+3)$

$$\begin{aligned}
5x^2-4x+7 &= A(x-1)(x+3) + B(x+3) + C(x-1)^2 \\
5x^2-4x+7 &= A(x^2+3x-x-3) + B(x+3) + C(x^2-2x+1) \\
5x^2-4x+7 &= x^2\underbrace{(A+C)}_{5} + x\underbrace{(2A+B-2C)}_{-4} + 1\underbrace{(-3A+3B+C)}_{7}
\end{aligned}$$

Auflösen, zum Beispiel mit Gaußverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -3 & 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+3\mathrm{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \\ 0 & 3 & 4 & 22 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}-3\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -14 \\ 0 & 0 & 16 & 64 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \Rightarrow A+4=5 \Rightarrow A=1 \\ \Rightarrow B-16=-14 \Rightarrow B=2 \\ \Rightarrow C=4 \end{array}$$

$$\frac{5x^2-4x+7}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{4}{x+3}$$

$$\int \frac{5x^2-4x+7}{(x-1)^2(x+3)}dx = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{4}{x+3}dx$$

$$\int \frac{5x^2-4x+7}{(x-1)^2(x+3)}dx = \ln(x-1) + \frac{-2}{(x-1)} + 4\ln(x+3) + \text{const.}$$

8.3. Uneigentliche Integrale

Definition:

$f : [a,b] \mapsto \mathrm{R}$ sei auf jedem Intervall $[a,b], b > 0$ stückweise stetig oder monoton. Also existiert $\int\limits_a^b f(x)dx$ für alle $b > 0$.

Existiert zudem $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$ so gilt:

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Analog gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$$

Beispiele

1.
$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} + 1 = 1$$

2.
$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \ln x\bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b - \ln 1 = \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

3.
$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{b\to\infty} \arctan x\bigg|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \arctan b - \arctan 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Definition:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int\limits_0^\infty f(x)dx + \int\limits_{-\infty}^0 f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b f(x)dx + \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 f(x)dx$$

Definition:

$f : (a, b] \mapsto \mathrm{R}$ sei stückweise stetig oder monoton. Dann gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b f(x)dx + \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^0 f(x)dx$$

Analog für $f : [a, b) \mapsto \mathrm{R}$.

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c \to 0+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{c \to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = \lim_{c \to 0+} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{c} =$$

$$= 2 - \lim_{c \to 0+} 2\sqrt{c} = 2 - 0 = 2$$

8.4. Fourier-Analysis

Achtung: Die Fourier-Analysis in diesem Skript ist nicht vollständig behandelt, da sie nicht Bestandteil der Mathematik 1-Prüfung im Wintersemester 2011/2012 war.

Vorbemerkung: T-Periodizität

$f : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$ heißt T-periodisch, falls

$$f(x) = f(x + T)$$

für alle $x \in \mathrm{R}$ mit $(T > 0)$ gilt.

Beispiele: $\sin$ und $\cos$ sind 2π-periodisch.

Definition Fourierapproximation

$f : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$, T-periodisch, $\omega := \frac{2\pi}{T}$, f sei stückweise monoton/stetig. Es sei:

$$a_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos k\omega t \; dt \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k := \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin k\omega t \; dt \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Dann nennen wir

$$\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos k\omega t + b_k \cdot \sin k\omega t$$

das n-te Fouriererpolynom oder die n-te Fourierapproximation (später: $f \approx \phi$).

Beispiel

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{für } 0 < t \leq< \pi \end{cases} \qquad \text{Fortgesetzt auf } \mathrm{R} \text{ mittels } f(t+2\pi) = f(t).$$

1. Beobachtung: f ist 2π-periodisch und ungerade ($f(-t) = -f(t)$).

2. Bestimmung der Fourierkoeffizienten ω, a_k, b_k**:**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$k = 0$:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\ dt = \frac{2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\ dt = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi} f(t)\ dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(t)\ dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi} 1\ dt - \int\limits_{\pi}^{2\pi} 1\ dt\Big) = \frac{1}{\pi}\Big((\pi - 0) - (2\pi - \pi)\Big) = \frac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0$$

$k \geq 1$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\cos k\omega t\ dt = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi} f(t)\cdot\cos kt\ dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(t)\cdot\cos kt\ dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi}\cos kt\ dt - \int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos kt\ dt\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{k}\sin kt\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\sin kt\Big|_{\pi}^{2\pi}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{k}\Big(\sin k\pi - \sin 0\Big) - \frac{1}{k}\Big(\sin 2k\pi - \sin k\pi\Big)\Big) = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cdot\sin k\omega t\ dt = \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi} f(t)\cdot\sin kt\ dt + \int\limits_{\pi}^{2\pi} f(t)\cdot\sin kt\ dt\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int\limits_0^{\pi}\sin kt\ dt - \int\limits_{\pi}^{2\pi}\sin kt\ dt\Big) = \frac{1}{\pi}\Big(-\frac{1}{k}\cos kt\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\cos kt\Big|_{\pi}^{2\pi}\Big) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg(-\frac{1}{k}\Big(\cos k\pi - \underbrace{\cos 0}_{=1}\Big) + \frac{1}{k}\Big(\underbrace{\cos 2k\pi}_{=1} - \cos k\pi\Big)\Bigg) = \frac{1}{k\pi}\Big(2 - 2\cos k\pi\Big)$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

3. Bestimmung der Funktion

$$\phi_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \cos k\omega t + b_k \cdot \sin k\omega t = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot \sin kt =$$

$$= \underbrace{\frac{4}{\pi}\sin t}_{k=1} + \underbrace{0}_{k=2} + \underbrace{\frac{4}{3\pi}\sin 3t}_{k=3} + \underbrace{\frac{4}{5\pi}\sin 5t}_{k=5} + \underbrace{\frac{4}{7\pi}\sin 7t}_{k=7} + \ldots + b_n \sin nt$$

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)t$$

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{4}{\pi}\sin t \\ \phi_3(t) &= \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t \\ \phi_5(t) &= \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\sin 5t \end{aligned}$$

Hinweis:

f ungerade $\Rightarrow a_k = 0$

f gerade $\Rightarrow b_k = 0$

Satz:

$f : \mathrm{R} \mapsto \mathrm{R}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, f T-periodisch und stückweise monoton oder stetig. Dann gilt:

1. An allen Stetigkeitspunkten t (d.h. f ist stetig in t) konvergiert $\Big(\phi_n(t)\Big)_{n\in\mathrm{N}}$ gegen $f(t)$, also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = f(x)$$

2. An allen Unstetigkeitspunkten t_0 von f (Sprünge) konvergiert $\Big(\phi_n(t_0)\Big)_{n\in\mathrm{N}}$ gegen den „Mittelwert des Sprunges“, also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t_0) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\lim_{t\to t_0+} f(t) + \lim_{t\to t_0-} f(t)\right)}_{\text{„Sprunghöhe“}}$$