Mathematik 2

Vorlesung von

Prof. Dr. Carsten Trunk

**im Sommersemester 2012 an der
Technischen Universität Ilmenau**

Mitschrift: Michael Pfeiffer

Letzte Korrektur: 8.11.2012

Wichtige Hinweise:

Bei diesem Skript handelt es sich um eine *studentische* Mitschrift. Daher gilt es Folgendes zu beachten:

1. **Dieses Skript ist nicht fehlerfrei!** Das Skript wurde nicht korrekturgelesen, daher sind Fehler bei den Sätzen und Definitionen möglich und sogar wahrscheinlich (von Tippfehlern ganz zu schweigen). Besonders an diesen „kritischen" Stellen ist daher *immer* eine andere Quelle zu Rate zu ziehen.

2. **Dieses Skript ist nicht vollständig!** Es fehlen unter anderem einige Beispiele und Beweise. Zudem finden sich keinerlei Erläuterungen, es wurde nur versucht, die Tafelanschrift so gut wie möglich wiederzugeben. Lediglich die Sätze und Definitionen sind *wahrscheinlich* alle vorhanden.

3. **Die Gliederung war nicht Teil der Vorlesung!** Sie wurde ohne weiteres mathematisches Sachverständnis erstellt, und dient nur dazu, die Sätze und Definitionen über das Inhaltsverzeichnis leichter auffindbar zu machen. Sie stellt jedoch keine offizielle Einteilung des Vorlesungsstoffes dar. Dasselbe gilt für die meisten „Überschriften" der Sätze und Definitionen.

Hinweise und Fehlerkorrekturen bitte an:
`Michael Pfeiffer <michael.pfeiffer@tu-ilmenau.de>`

Erstellt mit LaTeX.

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen mit mehreren Variablen **5**
1.1 Grundlagen . . . 5
1.1.1 Die Topologie des $\mathbb{R}^n$ . . . 5
1.1.2 Konvergenz . . . 6
1.1.3 Stetigkeit . . . 7
1.2 Differentiation . . . 9
1.2.1 Totale Differenzierbarkeit . . . 9
1.2.2 Die partielle Ableitung . . . 9
1.2.3 Das totale Differential . . . 10
1.2.4 Die Richtungsableitung . . . 10
1.2.5 Sätze über Differenzierbarkeit und Richtungsableitung . . . 11
1.2.6 Der Gradient . . . 11
1.2.7 Die Kettenregel . . . 12
1.2.8 Fehlerschrankensatz und konvexe Mengen . . . 15
1.2.9 Zweite partielle Ableitung und Hessematrix . . . 16
1.2.10 Taylorformel zweiten Grades . . . 17
1.3 Extremwerte . . . 18
1.3.1 Definition und notwendige Bedingung . . . 18
1.3.2 Hinreichende Bedingung . . . 18
1.3.3 Extremwerte unter Nebenbedingungen („Lagrange-Multiplikatoren") . . . 21
1.4 Kurvenintegrale . . . 24
1.4.1 Definition . . . 24
1.4.2 Divergenz, Rotation und Stammfunktion . . . 25
1.4.3 Stammfunktion und Gradientenfelder . . . 25
1.5 Mehrdimensionale Integration . . . 29
1.5.1 Definition . . . 29
1.5.2 Parametrisierung . . . 30
1.5.3 Transformationsregel . . . 31
1.6 Oberflächenintegrale . . . 34
1.6.1 Das skalare Oberflächenintegral . . . 34
1.6.2 Das Flussintegral . . . 36
1.6.3 Der Satz von Gauß . . . 38
1.6.4 Der Satz von Stokes . . . 39
1.7 Übersicht Integrale . . . 42

2 Differentialgleichungen **45**
2.1 Einführung . . . 45
2.1.1 Einführende Beispiele . . . 45
2.1.2 Trennbare Differentialgleichungen . . . 46
2.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . 47
2.2.1 Definition . . . 47
2.2.2 Lösen einer homogenen Gleichung . . . 47

2.2.3 Lösen einer inhomogenen Gleichung 48
2.3 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung 51
2.3.1 Satz von Picard-Lindelöf 51
2.3.2 Homogene Differentialgleichungssysteme 51
2.3.3 Inhomogene Differentialgleichungssysteme 52
2.3.4 Lösen mit Eigenwerten und Eigenvektoren 54
2.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung 59
2.4.1 Transformation in System 1. Ordnung 59
2.4.2 Existenz, Eindeutigkeit und Berechnung von Lösungen 59
2.4.3 Der Exponentialansatz 60
2.4.4 Ansatz vom Typ der rechten Seite 61

1 Funktionen mit mehreren Variablen

1.1 Grundlagen

1.1.1 Die Topologie des $\mathbb{R}^n$

Motivation:

- $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ Kurven im $\mathbb{R}^3$
- $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ Skalarfelder (Temperatur in einem Raum)
- $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ Vektorfelder (Strömungen)

Die Norm

Die euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$:

$$\left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}$$

Bemerkungen:

- $\left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right|$ ist der Abstand der Punkte $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^n$. Eine andere Schreibweise ist $d(\vec{a} - \vec{b}) = \left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right|$.
- Es gibt außer der euklidischen Norm weitere Normen:

  $$\left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right|_p := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^p} \qquad p = 1, 2, \ldots$$

  Insbesondere die

  - *Manhattan*-Norm mit $p = 1$:

    $$\left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right|_1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$$

  - Maximumnorm:

    $$\left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |a_k - b_k|$$

- Zudem gilt: Zu je zwei p-Normen $||\ldots||_{p_1}, ||\ldots||_{p_2}$ gibt es Zahlen $0 < c_1 \leq 1 \leq c_2$, so dass für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

  $$c_1 \left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right|_{p_1} \leq \left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right|_{p_2} \leq c_2 \left|\left|\vec{a} - \vec{b}\right|\right|_{p_1}$$

Definition: Eine Norm im $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $n : \mathbb{R}^n \mapsto R$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist $n(\vec{v}) \geq 0$
- $n(\vec{v}) = 0$ genau dann, wenn $\vec{v} = \vec{0}$
- Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gilt $n(\vec{v} + \vec{w}) \leq n(\vec{v}) + n(\vec{w})$
- Für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $n(\alpha\vec{v}) = |\alpha|\, n(\vec{v})$

Innere Punkte, Randpunkte und Offenheitskriterium

Definition: Sei $\varepsilon > 0$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}n$. Dann heißt die Menge $U_\varepsilon(\vec{v}) = \left\{\vec{w} \in \mathbb{R}^n \middle| ||\vec{v} - \vec{w}|| < \varepsilon\right\}$ (offene) ε-Umgebung von $\vec{v}$.

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt:

- $\vec{v} \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $U_\varepsilon(\vec{v}) \subseteq M$ gilt.
- $\vec{v} \in M$ heißt *Randpunkt* von M, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $U_\varepsilon(\vec{v}) \cap M \neq \emptyset$ und $U_\varepsilon(\vec{v}) \setminus M \neq \emptyset$ gilt.
- M heißt *offen*, wenn jeder Punkt $\vec{v} \in M$ innerer Punkt von M ist.
- Die Menge ∂M aller Randpunkte von M heißt *Rand* von M.
- Die Menge $M \setminus \partial M$ heißt das *Innere* von M.

Abgeschlossenheit

Definition:

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, wenn jeder Randpunkt von M zu M gehört, d. h. $\partial M \subseteq M$.
- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt beschränkt, wenn es ein $k > 0$ gibt, so dass gilt: $M \subseteq U_k(\vec{0})$.
- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.

1.1.2 Konvergenz

Definition 1: Konvergenz

$\left(\vec{x}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^n$. $\left(\vec{x}_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, falls gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{|\vec{x}_k - \vec{a}|}_{\in\mathbb{R}} = 0$$

Notation: $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$

Satz 2: Konvergenz der Komponenten

Eine Folge von Vektoren konvergiert genau dann, wenn alle Komponenten konvergieren.

1.1.3 Stetigkeit

Definition 3: Grenzwert

$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \mapsto R^m \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\vec{x} \mapsto \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

Für jede Folge $(\vec{x}_k)$ die gegen $\vec{a}$ im $\mathbb{R}^n$ konvergiert, gilt $\lim\limits_{k \mapsto \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{b}$ und es existiert mindestens eine Folge $\left(\vec{x}_k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \vec{a}$, die gegen $\vec{a}$ konvergiert.

Definition 4: Stetigkeit

$D \subset \mathbb{R}^n \quad f : D \mapsto R^m \quad \vec{a} \in D$

$\vec{f}$ heißt stetig in $\vec{a}$, falls gilt:

$$\lim_{\vec{x} \mapsto \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$$

$\vec{f}$ heißt stetig in D, falls $\vec{f}$ stetig in jedem Punkt $\vec{a} \in D$ ist.

Satz 5: Regeln zur Stetigkeit

$\vec{f}, \vec{g} : D \mapsto \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad h : D \mapsto \mathbb{R} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \vec{z} : E \mapsto D \quad E \subset \mathbb{R}^l$

Sind $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}, \vec{z}$ stetige Funktionen, so sind auch die folgenden Funktionen stetig:

- $\alpha \vec{f} + \vec{g}$
- $h\vec{f}$ und $\frac{\vec{f}}{h}$ sofern $h(\vec{x}) \neq 0$ für alle $\vec{x} \in D$
- $\vec{f}(\vec{z})$

Satz 6: Stetigkeit von Funktionen mit Polynomen

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ mit Polynom in x_1, Polynom in x_2, ... Polynom in x_n ist eine stetige Funktion.

Satz 7: Stetigkeit von Komponenten

$\vec{f} : D \mapsto \mathbb{R}^m \quad D \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

$\vec{f}$ stetig in $\vec{a} \Leftrightarrow f_1, f_2, \ldots f_m$ stetig in $\vec{a}$

Satz 8: Annahme von Maximum und Minimum

$f : K \mapsto \mathbb{R} \quad K \subset \mathbb{R}^n$

K sei beschränkt (d. h., es existiert $M > 0$ mit $||x|| \leq M$ für alle $\vec{x} \in K$). Ferner sei K abgeschlossen und f sei auf K stetig. Dann nimmt f Maximum und Minimum an, d. h. es existiert $\vec{a}, \vec{b} \in K$ mit

$$f(\vec{a}) = \max_{\vec{x} \in K} f(\vec{x}) \quad \text{und} \quad f(\vec{b}) = \min_{\vec{x} \in K} f(\vec{x})$$

Satz 9: Stetigkeit linearer Abbildungen

Lineare Abbildungen sind stetig.

Beweis: Stelle die lineare Abbildung mittels einer Matrix A dar:

$$\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

A ist eine $m \times n$-Matrix.

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist stetig, wenn jede Komponente stetig ist (Satz 7), also:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}$$

ist stetig nach Satz 6. $\square$

1.2 Differentiation

1.2.1 Totale Differenzierbarkeit

Definition 10: Totale Differenzierbarkeit

$\vec{f} : G \mapsto \mathbb{R}^m \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\vec{f}$ heißt differenzierbar in $\vec{x_0} \in G$, wenn für alle $\vec{x_0} + \vec{h}$ aus einer (kleinen) Kugel um $\vec{x_0}$ gilt

$$\vec{f}(\vec{x_0} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{x_0}) + D\vec{h} + \overrightarrow{\mathrm{Rest}} \qquad \text{mit } \lim_{\vec{h} \to \vec{0}} \frac{\overrightarrow{\mathrm{Rest}}}{\left|\vec{h}\right|} = \vec{0}$$

wobei D eine Matrix ist:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mn} \end{pmatrix}$$

Notation: $\vec{f}'(\vec{x_0}) = D$

1. Bemerkung: $\vec{f}(\vec{x_0}) \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor. $\vec{f}'(\vec{x_0}) = D$ ist eine Matrix. $\Rightarrow$ Die zweite Ableitung ist nicht erklärt.

2. Bemerkung: Für $m = n = 1$ stimmt Definition 10 mit Mathe 1 überein.

1.2.2 Die partielle Ableitung

Beispiel: $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = x \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$$

1.2.3 Das totale Differential

Definition und Satz 11: Totales Differential mit partiellen Ableitungen

$\vec{f} : G \mapsto \mathbb{R}^m \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen.
$\vec{f}$ differenzierbar in G (d. h. für alle $\vec{x} \in G$ ist $\vec{f}$ differenzierbar). Dann gilt:

$$\vec{f}\,'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Zudem gilt folgende Notation:

$$\vec{f}\,'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_2}(\vec{x}), \ldots \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

Wobei gilt:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{\vec{f}(x_1, \ldots x_j + 1, \ldots x_n) - \vec{f}(x_1, \ldots x_n)}{t}$$
$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + t\vec{e_j}) - \vec{f}(\vec{x})}{t}$$

Beispiel: $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ („von vorhin“)

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ f_3(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}\,'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.4 Die Richtungsableitung

Definition 12: Die Richtungsableitung

Die Richtungsableitung von $\vec{f}$ in $\vec{x}$ in Richtung $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist erklärt mittels

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) := \lim_{t \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + t\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{t}$$

1.2.5 Sätze über Differenzierbarkeit und Richtungsableitung

Satz 13: Satz über differenzierbare Funktionen

$\vec{f}: G \mapsto \mathbb{R}^m \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen.

1. Existieren alle partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ und sind diese stetig in G, so ist $\vec{f}$ total differenzierbar in G.
2. Existiert eine partielle Ableitung *nicht*, so ist $\vec{f}$ nicht total differenzierbar.
3. Existieren alle partiellen Ableitungen, und sind einige stetig und einige nicht $\rightsquigarrow$?
4. Ist $\vec{f}$ total differenzierbar so ist $\vec{f}$ stetig. **Daher:** Falls $\vec{f}$ nicht stetig ist, so ist $\vec{f}$ auch nicht total differenzierbar.

Satz 14: Der Satz über die Richtungsableitung

$\vec{f}: G \mapsto \mathbb{R}^m \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\vec{f}$ differenzierbar in $\vec{x}$, $\vec{x} \in G$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $||\vec{v}|| = 1$. Dann gilt:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \vec{f}'(\vec{x})\vec{v}$$

1.2.6 Der Gradient

Hinweis: m ist jetzt 1!

$f: G \mapsto \mathbb{R} \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen. f in $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, also gilt:

$$f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + f'(\vec{x})\vec{h} + \overrightarrow{\mathrm{Rest}} \qquad \text{(für kleine } \vec{h}\text{) mit } \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$f'(\vec{x})$ hat also $m = 1$ Zeilen und n Spalten:

$$f'(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Durch Umformen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) &= f'(\vec{x})\vec{h} + \overrightarrow{\mathrm{Rest}} = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \overrightarrow{\mathrm{Rest}} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} h_n(\vec{x}) + \overrightarrow{\mathrm{Rest}} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\mathrm{Rest}} = \\
&= \left(f'(\vec{x})^{\mathrm{T}}, \vec{h} \right)_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\mathrm{Rest}}
\end{aligned}$$

Der **Gradient** ist also:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = f'(\vec{x})^{\mathrm{T}} = \operatorname{grad}_f(\vec{x})$$

Also gilt:

$$f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) = \left(f'(\vec{x})^{\mathrm{T}}, \vec{h}\right) + \overrightarrow{\mathrm{Rest}} = \left(\operatorname{grad}_f(\vec{x}), \vec{h}\right) + \overrightarrow{\mathrm{Rest}}$$

Änderung von f in Richtung $\vec{h} \approx \left(\operatorname{grad}_f(\vec{x}), \vec{h}\right) = \left|\left|\operatorname{grad}_f(\vec{x})\right|\right| \cdot \left|\left|\vec{h}\right|\right| \cdot \cos\left(\sphericalangle \operatorname{grad}_f(\vec{x}), \vec{h}\right)$

1. Änderung am größten, wenn $\cos\sphericalangle \ldots = 1$, also $\sphericalangle(\operatorname{grad}_f(\vec{x}), \vec{h}) = 0$. Das ist der Fall, wenn $\operatorname{grad}_f(\vec{x})$ parallel zu $\vec{h}$ ist und beide in dieselbe Richtung zeigen.

   $\Rightarrow \operatorname{grad}_f(\vec{x})$ „schaut“ in die Richtung des stärksten Anstiegs.

2. Änderung ist 0, wenn $\cos\sphericalangle \ldots = 0$, also $\sphericalangle \ldots = 90°$, d. h. $\vec{h}$ steht senkrecht auf $\operatorname{grad}_f(\vec{x})$.

   $\Rightarrow \operatorname{grad}_f(\vec{x})$ steht senkrecht auf dem Niveau von f.

1.2.7 Die Kettenregel

Satz 15: Die Kettenregel

Es seien $\vec{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ und $\vec{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ differenzierbar.

Dann ist

$$\vec{f}\Big(\vec{g}(\vec{x})\Big) = \vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$$

ebenfalls differenzierbar. Und es gilt:

$$\left(\vec{f} \circ \vec{g}\right)'(\vec{x}) = \vec{f}\,'\Big(\vec{g}(\vec{x})\Big) \cdot \vec{g}\,'(\vec{x})$$

Es seien

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ g_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{y}) \\ f_2(\vec{y}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{y}) \end{pmatrix}$$

mit

$$g_1, g_2, \ldots g_m : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \qquad f_1, f_2, \ldots f_p : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$$

Dann gilt die Kettenregel:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1\circ\vec{g}}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1\circ\vec{g}}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1\circ\vec{g}}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2\circ\vec{g}}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2\circ\vec{g}}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2\circ\vec{g}}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p\circ\vec{g}}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_p\circ\vec{g}}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_p\circ\vec{g}}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\big(\vec{g}(\vec{x})\big) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}\big(\vec{g}(\vec{x})\big) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\big(\vec{g}(\vec{x})\big) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_m}\big(\vec{g}(\vec{x})\big) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1}\big(\vec{g}(\vec{x})\big) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial y_m}\big(\vec{g}(\vec{x})\big) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Satz 16: Kettenregel über einzelne Elemente der Ableitung

Es sei $1 \leq i \leq p$ und $1 \leq j \leq n$. Dann gilt:

$$\frac{\partial f_i \circ \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_l}\Big(\vec{g}(\vec{x})\Big) \cdot \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(\vec{x})$$

Beispielaufgabe

Die Aussagen von Satz 15 und 16 als Referenz:

Es seien $\vec{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{f} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ differenzierbar. Dann ist $\vec{f} \circ \vec{g} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$ differenzierbar mit

$$\Big(\vec{f} \circ \vec{g}\Big)'(\vec{x}) = \vec{f}\,'\Big(\vec{g}(\vec{x})\Big)\vec{g}\,'(\vec{x}) \qquad (*)$$

oder mit

$$\frac{\partial f_i \circ \vec{g}}{\partial x_j}(\vec{x}) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_l}\Big(\vec{g}(\vec{x})\Big) \frac{\partial g_l}{\partial x_j}(\vec{x}) \qquad (**)$$

wobei gilt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \qquad \vec{f}(\vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{y}) \\ \vdots \\ f_p(\vec{y}) \end{pmatrix}$$

Aufgabe: $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \vec{g} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ Zudem nehmen wir an: $\varrho > 0$

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \\ x + y \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}(\varrho, \phi) = \begin{pmatrix} g_1(\varrho, \phi) \\ g_2(\varrho, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \cos\phi \\ \varrho \sin\phi \end{pmatrix} \qquad \text{(Polarkoordinaten)}$$

1. Berechne $(*)$.

2. Berechne $(**)$ nach f_1 und $x_1 = \varrho$.

Lösung: Zunächst gilt:

$$n = m = p = 2$$

Nun müssen die Variablen der Definition in die Variablen der Aufgabenstellung „übersetzt“ werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \\ \phi \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir bilden nun zunächst („auf Vorrat“) die partiellen Ableitungen von $\vec{f}$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2 2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2 \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2 \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1$$

Und die partiellen Ableitungen von $\vec{g}$:

$$\frac{\partial g_1}{\partial \varrho}(\varrho,\phi) = \cos\phi \qquad \frac{\partial g_1}{\partial \phi}(\varrho,\phi) = -\varrho\sin\phi$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \varrho}(\varrho,\phi) = \sin\phi \qquad \frac{\partial g_1}{\partial \phi}(\varrho,\phi) = \varrho\cos\phi$$

1. Lösung nach $(*)$:

$$\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)(\varrho,\phi) = \vec{f}'\left(\vec{g}\left(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \phi\end{smallmatrix}\right)\right)\vec{g}'\left(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \phi\end{smallmatrix}\right)$$

Die Berechnung erfolgt für alle drei „Teile“ einzeln. Zunächst wird der **erste Teil** $\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)(\varrho,\phi)$ berechnet:

$$\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)(\varrho,\phi) = \vec{f}\left(\vec{g}\left(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \phi\end{smallmatrix}\right)\right) = \vec{f}\begin{pmatrix} \varrho\cos\phi \\ \varrho\sin\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\phi+\varrho^2\sin^2\phi}+1} \\ \varrho\cos\phi + \varrho\sin\phi \end{pmatrix}$$

Da $\varrho > 0$ ist $\sqrt{\varrho^2\cos^2\phi + \varrho^2\sin^2\phi} = \sqrt{\varrho^2(\cos^2\phi + \sin^2\phi)} = \varrho$, so dass gilt:

$$\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)(\varrho,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\varrho+1} \\ \varrho(\cos\phi + \sin\phi) \end{pmatrix}$$

Daher gilt für die Ableitung der Verkettung $\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)'(\varrho,\phi)$:

$$\left(\vec{f}\circ\vec{g}\right)'(\varrho,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f\circ g)_1}{\partial\varrho}(\varrho,\phi) & \frac{\partial(f\circ g)_1}{\partial\phi}(\varrho,\phi) \\ \frac{\partial(f\circ g)_2}{\partial\varrho}(\varrho,\phi) & \frac{\partial(f\circ g)_2}{\partial\phi}(\varrho,\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\varrho+1)^2} & 0 \\ \cos\phi + \sin\phi & \varrho(-\sin\phi + \cos\phi) \end{pmatrix}$$

Nun wird der **zweite Teil** $\vec{f}'\left(\vec{g}\left(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \phi\end{smallmatrix}\right)\right)$ berechnet:

$$\vec{f}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}'\Big(\vec{g}\big(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \phi\end{smallmatrix}\big)\Big) = \vec{f}'\begin{pmatrix}\varrho\cos\phi\\ \varrho\sin\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\varrho\cos\phi}{(\varrho+1)^2\varrho} & \frac{\varrho\sin\phi}{(\varrho+1)^2\varrho}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Zuletzt folgt der **dritte Teil** $\vec{g}'\big(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \phi\end{smallmatrix}\big)$:

$$\vec{g}'\big(\begin{smallmatrix}\varrho\\ \phi\end{smallmatrix}\big)\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial\varrho}(\varrho,\phi) & \frac{\partial g_1}{\partial\phi}(\varrho,\phi)\\ \frac{\partial g_2}{\partial\varrho}(\varrho,\phi) & \frac{\partial g_2}{\partial\phi}(\varrho,\phi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\phi & -\varrho\sin\phi\\ \sin\phi & \varrho\cos\phi\end{pmatrix}$$

Zusammen ergeben alle drei Teile:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{(\varrho+1)^2} & 0\\ \cos\phi+\sin\phi & \varrho(-\sin\phi+\cos\phi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\varrho\cos\phi}{(\varrho+1)^2\varrho} & \frac{\varrho\sin\phi}{(\varrho+1)^2\varrho}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\phi & -\varrho\sin\phi\\ \sin\phi & \varrho\cos\phi\end{pmatrix}$$

Die Probe zeigt: Die Matrixmultiplikation funktioniert.

2. Lösung für $(**)$ nach f_1 und $x_1 = \varrho$:

   Für $i = j = 1$ und $m = 2$ folgt aus $(**)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1\circ\vec{g}}{\partial x_1}(\vec{x}) &= \sum_{l=1}^{2}\frac{\partial f_1}{\partial y_l}\Big(\vec{g}(\vec{x})\Big)\frac{\partial g_l}{\partial x_1}(\vec{x}) =\\ &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\Big(\vec{g}(\vec{x})\Big)\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\Big(\vec{g}(\vec{x})\Big)\frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\vec{x}) =\end{aligned}$$

   Durch Ersetzen der Variablen ergibt sich:

$$\begin{aligned}&= \frac{\partial f_1}{\partial x}\begin{pmatrix}\varrho\cos\phi\\ \varrho\sin\phi\end{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial\varrho}\begin{pmatrix}\varrho\\ \phi\end{pmatrix} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\begin{pmatrix}\varrho\cos\phi\\ \varrho\sin\phi\end{pmatrix}\frac{\partial g_2}{\partial\varrho}\begin{pmatrix}\varrho\\ \phi\end{pmatrix} =\\ &= \frac{\varrho\cos\phi}{(\varrho+1)^2\varrho}\cos\phi + \frac{\varrho\sin\phi}{(\varrho+1)^2\varrho}\sin\phi = \frac{1}{(\varrho+1)^2}\end{aligned}$$

   Das Ergebnis ist identisch zum $1,1$-Eintrag der Jakobi-Matrix.

Bemerkung: Satz 15/16 gilt analog für Funktionen, die auf offenen Teilmengen erklärt sind.

1.2.8 Fehlerschrankensatz und konvexe Mengen

Satz 17: Fehlerschrankensatz

$f : G \mapsto \mathbb{R} \quad G \subset \mathbb{R}^m$ offen und es existiere $M_1, \ldots, M_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_l}\Big((1-t)\vec{y_0} + t\vec{y_1}\Big)\right| \le M_l \qquad \text{für } 1 \le l \le m \text{ und } t \in [0,1]$$

Dann gilt:

$$\Big|f(\vec{y_1}) - f(\vec{y_0})\Big| \le \sum_{l=1}^{m} M_l\Big|y_l^1 - y_l^0\Big|$$

Definition 18: Konvexe Mengen

$G \subset \mathbb{R}^m$ heißt konvex, falls für jedes $\vec{x_0}, \vec{x_1} \in G$ gilt:

$$(1-t)\vec{x_0} + t\vec{x_1} \in G \qquad \text{für alle } t \in [0,1]$$

D. h. „alle Verbindungsstrecken liegen in G“.

1.2.9 Zweite partielle Ableitung und Hessematrix

In diesem Unterabschnitt gilt stets:

$f : G \mapsto \mathbb{R} \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in G$

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^y \cos x & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^y \cos x \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -e^y \sin x & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -e^y \sin x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^y \cos x & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^y \sin x \\ & & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^y \cos x \end{aligned}$$

Definition 19: Die zweiten partiellen Ableitungen

Diese Ausdrücke heißen zweite partielle Ableitungen von f. Sind diese stetig, so nenne wir die Funktion f zweimal stetig differenzierbar.

Satz 20: Symmetrie der partiellen Ableitungen bei zweimal stetig differenzierbaren Funktionen (Satz von Schwarz)

Ist f zweimal stetig differenzierbar, so gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) \qquad \text{mit } 1 \leq j, i \leq n$$

Definition: Die Hessematrix

$$\operatorname{hess}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_3}^2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_3}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_n}^2}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

1. Es sei f zweimal stetig differenzierbar. Mit dem Satz von Schwarz gilt: $\mathrm{hess}_f(\vec{x})$ ist symmetrisch.
2. $\mathrm{hess}_f(\vec{x}) = \mathrm{grad}'_f(\vec{x}) = f''(\vec{x})$

Beispiel: $f(x,y) = e^y \cos x$

$$\mathrm{hess}_f(\vec{x}) = \mathrm{hess}_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^y \cos x & -e^y \sin x \\ -e^y \sin x & e^y \cos x \end{pmatrix}$$

1.2.10 Taylorformel zweiten Grades

Satz 21: Die Taylorformel zweiten Grades

$\vec{f} : G \mapsto \mathbb{R} \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen. f zweimal stetig differenzierbar. $\vec{x_0}, \vec{x_0} + \vec{h} \in G \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Die Verbindungsstrecke zwischen $\vec{x_0}$ und $\vec{x_0} + \vec{h}$ sei auch in G.

Dann gilt:

$$f(\vec{x_0} + \vec{h}) = f(\vec{x_0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x_0}) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x_0}) h_i h_j + \overrightarrow{\mathrm{Rest}} \qquad \text{mit } \lim_{|\vec{h}| \to 0} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{Rest}}}{\left|\vec{h}\right|^2}$$

Und es gilt auch:

$$f(\vec{x_0} + \vec{h}) = f(\vec{x_0}) + f'(\vec{x_0})\vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^{\mathrm{T}} \, \mathrm{hess}_f(\vec{x_0}) \vec{h} + \overrightarrow{\mathrm{Rest}}$$

1.3 Extremwerte

Im Folgenden sei immer, soweit nicht anders definiert:

$f : G \mapsto \mathbb{R} \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen, f zweimal stetig differenzierbar.

1.3.1 Definition und notwendige Bedingung

Satz 22: Kandidaten für Extremwerte

f habe in $\vec{x_0} \in G$ ein lokales Minimum oder Maximum, dann gilt $\operatorname{grad}_f(\vec{x_0}) = \vec{0}$. Also ist $\operatorname{grad}_f(\vec{x_0}) = \vec{0}$ notwendig, aber nicht hinreichend.

Also: $\vec{x_0}$ mit $\operatorname{grad}_f(\vec{x_0}) = \vec{0}$ ist ein Kandidat für ein lokales Maximum oder Minimum.

Definition: Lokale Maxima und Minima

$\vec{x_0} \in G$ heißt lokales Maximum (bzw. Minimum), falls eine offene Menge $U \subset G$ mit $\vec{x_0} \in U$ existiert, so dass

$$\vec{f}(\vec{x_0}) \geq f(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in U$$
$$\text{(bzw. } \vec{f}(\vec{x_0}) \leq f(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in U\text{).}$$

Gilt zudem

$$\vec{f}(\vec{x_0}) > f(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in U$$
$$\text{(bzw. } \vec{f}(\vec{x_0}) < f(\vec{x}) \text{ für alle } \vec{x} \in U\text{),}$$

dann heißt $\vec{x_0}$ striktes lokales Maximum (bzw. Minimum).

1.3.2 Hinreichende Bedingung

Sei $\vec{x_0}$ Kandidat für Maximum oder Minimum, so gilt $\operatorname{grad}_f(\vec{x_0}) = f'(\vec{x_0}) = \vec{0}$. Aus der Taylorformel zweiten Grades (Satz 21, zweite Variante) folgt:

$$f(\vec{x_0} + \vec{h}) = f(\vec{x_0}) + \underbrace{\frac{1}{2}\Big(\operatorname{hess}_f(\vec{x_0})\vec{h}, \vec{h}\Big)_{\mathbb{R}^n}}_{(*)}$$

Annahme: $(*) > 0$ für jedes $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow f(\vec{x_0} + \vec{h}) > f(\vec{x_0}) \qquad \text{für alle } \vec{h} \in \mathbb{R}^n$$

Satz 23a: Hinreichende Bedingung für strikte Maxima und Minima

$\vec{x_0}$ sei Kandidat für Maximum oder Minimum, d. h. $\text{grad}_f(\vec{x_0}) = 0$.

Gilt

$$\underbrace{\Big(\text{hess}_f(\vec{x_0})\vec{h}, \vec{h}\Big)_{\mathbb{R}^n} > 0 \qquad \text{für alle } \vec{h} \in \mathbb{R}^n}_{\text{Auch: } \text{hess}_f(\vec{x_0}) \text{ ist positiv definit.}},$$

so hat f in $\vec{x_0}$ ein striktes Minimum.

Satz 24: Definitheit von Matrizen

A $n \times n$-Matrix, A sei symmetrisch ($\to A^{\mathrm{T}} = A$).

A heißt *positiv definit*, falls $\Big(A\vec{x}, \vec{x}\Big)_{\mathbb{R}^n} > 0$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Die negative Definitheit ist analog definiert.

Satz 23b: Extremwerte und Definitheit von Matrizen

$\vec{x_0}$ sei ein kritischer Punkt (Kandidat für einen Extrempunkt).

Dann gilt:

1. Ist $\text{hess}_f(\vec{x_0})$ positiv definit, so hat f in $\vec{x_0}$ ein striktes lokales Minimum.
2. Ist $\text{hess}_f(\vec{x_0})$ negativ definit, so hat f in $\vec{x_0}$ ein striktes lokales Maximum.
3. Existieren $\vec{h_0}, \vec{h_1} \in \mathbb{R}^n$ mit $\Big(\text{hess}_f(\vec{x_0})\vec{h_0}, \vec{h_0}\Big)_{\mathbb{R}^n} > 0$ und $\Big(\text{hess}_f(\vec{x_0})\vec{h_1}, \vec{h_1}\Big)_{\mathbb{R}^n} < 0$, dann hat f kein Extremum in $\vec{x_0}$ („Sattelpunkt“).
4. Existiert ein $\vec{\tilde{h}} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $\Big(\text{hess}_f(\vec{x_0})\vec{\tilde{h}}, \vec{\tilde{h}}\Big)_{\mathbb{R}^n} = 0 \rightsquigarrow$? (Satz 23 hilft nicht weiter).

Satz 25: Definitheit und Eigenwerte

A sei eine symmetrische $n \times n$-Matrix.

- A positiv definit. $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind größer Null.
- A negativ definit. $\Leftrightarrow$ Alle Eigenwerte von A sind kleiner Null.
- Es existieren $\vec{h_0}, \vec{h_1}$ mit $\Big(A\vec{h_0}, \vec{h_0}\Big)_{\mathbb{R}^n} > 0$ und $\Big(A\vec{h_1}, \vec{h_1}\Big)_{\mathbb{R}^n} < 0$. $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Eigenwert λ von A mit $\lambda > 0$ und einen Eigenwert μ von A mit $\mu < 0$.

Satz 26: Definitheit und Determinanten

A sei symmetrische 2×2-Matrix.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- A positiv definit $\Leftrightarrow \det A > 0,\ a > 0$
- A negativ definit $\Leftrightarrow \det A > 0,\ a < 0$
- Es existieren $\vec{h_0}, \vec{h_1}$ mit $\left(A\vec{h_0}, \vec{h_0}\right)_{\mathbb{R}^n} > 0$ und $\left(A\vec{h_1}, \vec{h_1}\right)_{\mathbb{R}^n} < 0.$ $\Leftrightarrow \det A < 0$

Beispielaufgabe

Aufgabe:

$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \quad f(x,y) = e^x(x + y^3 - 3y + 1)$

Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extrema von f!

Lösung:

Bestimmung von Grad und Hesse-Matrix:

$$\operatorname{grad}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e^x(x + y^3 - 3y + 1) + e^x \\ e^x(3y^2 - 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x(x + y^3 - 3y + 2) \\ e^x(3y^2 - 3) \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{hess}_f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e^x(x + y^3 - 3y + 2) + e^x & e^x(3y^2 - 3) \\ e^x(3y^2 - 3) & 6ye^x \end{pmatrix}$$

Bestimmung der kritischen Punkte:

$$\operatorname{grad}_f(\vec{x}) = 0 = \begin{pmatrix} e^x(x + y^3 - 3y + 2) \\ e^x(3y^2 - 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y^3 - 3y + 2 = 0$$
$$3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$y = 1$:

$$x + 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$y = -1$:

$$x - 1 + 3 + 2 = 0 \Rightarrow x = -4$$

Es ergeben sich also zwei kritische Punkte:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun müssen beide auf Minima bzw. Maxima überprüft werden:

$$\operatorname{hess}_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^0(0 + 1 - 3 + 2) + e^0 & e^0(3 - 3) \\ e^0(3 - 3) & 6e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{hess}_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit. $\Rightarrow f$ hat in $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein lokales Minimum.

$$\operatorname{hess}_f \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4}(-4-1+3+2)+e^{-4} & e^{-4}(3-3) \\ e^{-4}(3-3) & -6e^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-4} & 0 \\ 0 & -6e^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{-4} & 0 \\ 0 & -6e^{-4} \end{pmatrix} = -6(e^{-4})^2 < 0$$

$\Rightarrow f$ hat in $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ einen Sattelpunkt.

1.3.3 Extremwerte unter Nebenbedingungen („Lagrange-Multiplikatoren“)

Satz 27: Extrema unter Nebenbedingungen

$f, g : G \mapsto \mathbb{R} \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen, f, g stetig differenzierbar.

Die Kandidaten $\vec{x_0}$ für die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x_0})$ sind alle entweder Lösungen von

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{grad}_f(\vec{x_0}) &= \lambda \operatorname{grad}_g(\vec{x_0}) \\ g(\vec{x_0}) &= 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}\right\} \text{(1)} \qquad \text{oder von} \qquad \left.\begin{aligned} \operatorname{grad}_g(\vec{x_0}) &= 0 \\ g(\vec{x_0}) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(2)}$$

und benutze (oftmals) Satz 8: $f : K \mapsto \mathbb{R}, K \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen: Dann nimmt f globales Maximum und Minimum an.

Aufgabe

Man bestimme alle globalen Extrema der Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Lösung: „Wo können Kandidaten für globale Extrema sein?“

1. Kandidaten im Inneren (d. h. aus der offenen Menge):

$$f : D \setminus \partial D \mapsto \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 < 1 \right\}$$

2. Kandidaten auf dem Rand:

$$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \quad f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y}{\sqrt{2}}$$
$$\text{mit } g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

1. Bestimmung der Kandidaten im Inneren:

$$\operatorname{grad}_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \operatorname{hess}_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{grad}_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \text{keine Kandidaten im Inneren}$$

2. Bestimmung der Kandidaten auf dem Rand:

a)

$$\operatorname{grad}_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{grad}_g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$g(x,y) = 0$$
$$\begin{pmatrix} x \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & x = 2\lambda x \\ \text{(II)} \quad & -\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\lambda y \\ \text{(III)} \quad & x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

1. Fall: $x = 0$

$$\text{(III)} \quad y^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow y = \pm 1$$

2. Fall: $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 1 = 2\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \\ \text{(II)} \quad & -\frac{1}{\sqrt{2}} = y \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{(III)} \quad & x^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + \frac{1}{2} - 1 = 0 \\ & \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \quad \text{Kandidaten:} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

b)

$$\operatorname{grad}_g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g(x,y) = 0$$
$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Lösung}$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist keine Lösung}$$
$$\rightsquigarrow \quad \text{keine weiteren Kandidaten}$$

3. $f : D \mapsto \mathbb{R}$ stetig, D abgeschlossener Einheitskreis, also ist D beschränkt und abgeschlossen. $\rightsquigarrow f$ nimmt globales Minimum und Maximum an (Satz 8). Betrachte Funktionswerte der 4 Kandidaten:

$$\underbrace{f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{globales Minimum}} \qquad f\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \underbrace{f\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \qquad f\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \frac{3}{4}}_{\text{globale Maxima}}$$

1.4 Kurvenintegrale

1.4.1 Definition

Definition 28: Kurvenintegrale

$F : G \mapsto \mathbb{R}$ („Vektorfeld“) $\quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen.
$\vec{x} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ („Kurve“), so dass $\vec{F} \circ \vec{x}$ definiert ist.

Dann gilt:

$$\int\limits_{\vec{x}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} := \int\limits_a^b \vec{F}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t$$

„Kurvenintegral eines Vektorfeldes“

Analog: $U : G \mapsto \mathbb{R}$ (skalar)

$$\int\limits_{\vec{x}} U\,\mathrm{d}\vec{s} := \int\limits_a^b U\big(\vec{x}(t)\big)\left|\dot{\vec{x}}(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

„Kurvenintegral eines Skalarfeldes“

Die Länge einer Kurve ist:

$$\int\limits_{\vec{x}} \mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_a^b \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|\,\mathrm{d}t$$

Aufgabe:

Bestimme $\int\limits_{\vec{r}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$ mit $\vec{v} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\vec{r} : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$.

$$\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\int\limits_{\vec{r}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int\limits_0^1 \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big)\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \vec{v}\left(\begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \begin{pmatrix} -t^2-1 \\ t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^1 -t^2 - 1 + 2t^2\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^2 - 1\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - t\,\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 - (0 - 0) = -\frac{2}{3}$$

1.4.2 Divergenz, Rotation und Stammfunktion

$G \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^n$, $u : G \mapsto \mathbb{R}$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

Gradient (zur Wiederholung):

$$\operatorname{grad}_u(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Divergenz:

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) := \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\vec{x}) + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}(\vec{x}) + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\vec{x})$$

Rotation: (nur für $n = 3$!)

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

grad_u: „Schaut“ in die Richtung des stärksten Anstiegs

$|\operatorname{grad}_u|$: Höhe des Anstiegs

$\operatorname{div} \vec{v}$: „Quelldichte“: Quellen (> 0), Senken (< 0), quellfrei ($= 0$)

$\operatorname{rot} \vec{v}$: steht senkrecht auf der stärksten Zirkulation

$|\operatorname{rot} \vec{v}|$: Größe der Zirkulation

Navier-Stokes-Gleichung

$f, p, u : G \mapsto \mathbb{R}$ (skalar)

$$\dot{u} + u \operatorname{grad} u = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \operatorname{grad} u + f$$

Millennium-Problem $\rightarrow$ 1 Mio. US-$!

1.4.3 Stammfunktion und Gradientenfelder

Definition 29: Wirbelfreie Felder

$\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^3 \quad G \subset \mathbb{R}^3$ offen.

$\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ nennt man wirbelfrei.

Definition 30: Stammfunktion und Gradientenfeld

$\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^n \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : G \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Gilt $\vec{v} = -\operatorname{grad} u$,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dann heißt u *Stammfunktion* oder *Potential* von $\vec{v}$ und $\vec{v}$ heißt *Gradienten-* oder *Potentialfeld*.

Satz 31: Gradientenfeld und Rotation

$\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^3 \quad G \subset \mathbb{R}^3$ offen, $u : G \mapsto \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

Merksatz: Ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld, so gilt: $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$

$\Rightarrow$ Gilt $\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$, dann ist $\vec{v}$ kein Gradientenfeld!

Satz 32: Potential

$\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^3 \quad G \subset \mathbb{R}^3$ offen.

Ist $\vec{v}$ stetig differenzierbar und wirbelfrei und ist G konvex, dann existiert ein Potential u, $u : G \mapsto \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = -\operatorname{grad} u$ (hinreichende Bedingung).

Satz 32a: Gradientenfeld und Rotation (2)

$\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, $G \subset \mathbb{R}^3$ offen und einfach zusammenhängend.[1]

Dann gilt: $\vec{v}$ ist Gradientenfeld. $\Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$.

Satz 33: Kurvenintegrale und Potentialfeld

Das Kurvenintegral von Potentialfeldern ist wegunabhängig!

$\vec{x} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ (Kurve) $\vec{v} : G \mapsto \mathbb{R}^n \quad G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : G \mapsto \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = -\operatorname{grad} u$.

Dann gilt:

$$\int\limits_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}s = \int\limits_a^b \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t = u\big(\vec{x}(a)\big) - u\big(\vec{x}(b)\big)$$

„Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt des Weges“

Bemerkungen:

1. Das Integral einer geschlossenen Kurve im Potentialfeld ist Null.
2. Vektorfelder mit wegunabhängigen Kurvenintegral besitzen ein Potential.

[1] D. h. alle geschlossenen Kurven in G lassen sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen.

Aufgabe

$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \\ 3z^2 \end{pmatrix}$$

1. Man überprüfe, ob $\vec{v}$ ein Gradientenfeld ist.
2. Man berechne folgendes Kurvenintegral:

$$\int\limits_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}s \qquad \text{mit} \quad \vec{x} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^3 \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. $\mathbb{R}^3$ ist konvex.

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2y-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Also ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld (Satz 32a).

2.

$$\int\limits_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}s = \int\limits_a^b \vec{v}\big(\vec{x}(t)\big) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, \mathrm{d}t = u\big(\vec{x}(0)\big) - u\big(\vec{x}(1)\big) = u\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - u\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   (wobei $\vec{v} = -\operatorname{grad} u$)

$$\vec{v} = -\operatorname{grad} u$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \\ 3z^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) & \frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) &= -y^2 \\ &(\mathrm{II}) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) &= -2xy \\ &(\mathrm{III}) & \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) &= -3z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= -y^2 x + c(y,z) && \text{Bilden der Stammfunktion aus (I).} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) &= -2xy + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) && \text{Ableiten dieser Stammfunktion nach } y. \\ -2xy + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) &= -2xy && \text{Vergleichen dieser Ableitung mit (II).} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = 0$$
$$\Rightarrow c(y,z) = \alpha + \tilde{c}(z)$$

Wir setzen $\alpha = 0$, also gilt für die Stammfunktion:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= -y^2x + \tilde{c}(z) & \\
\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial \tilde{c}}{\partial z}(z) & \text{Ableiten der Stammfunktion nach } z. \\
\frac{\partial \tilde{c}}{\partial z}(z) &= -3z^2 & \text{Vergleichen dieser Ableitung mit (III).}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{c}(z) = -z^3$$
$$\Rightarrow u(x,y,z) = -y^2x - z^3$$

Nun lässt sich das Kurvenintegral berechnen:

$$\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}s = u\big(\vec{x}(0)\big) - u\big(\vec{x}(1)\big) = u\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) - u\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0 - (-1-1) = 2$$

Aufgabe

$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix}yz\\xz\\xy\end{pmatrix}$$

Gegeben sei zudem folgende Kurve:

$$\vec{x} : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3 \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix}2\cos t\\2\sin t\\0\end{pmatrix}$$

Berechne die Rotation von $\vec{v}$ und $\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}s$.

Lösung:

$\mathbb{R}^3$ ist konvex.

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix}x-x\\y-y\\z-z\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{v}$ ist also ein Gradientenfeld und $\vec{x}$ eine geschlossene Kurve (Kreis mit Radius 2 in x-y-Ebene). Daher gilt mit Satz 32, Bemerkung 2:

$$\int_{\vec{x}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}s = 0$$

1.5 Mehrdimensionale Integration

1.5.1 Definition

Satz 34: Mehrdimensionale Integrierbarkeit

$B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und mit „glattem“ Rand, $g : B \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt und g habe höchstens in endlich vielen Punkten Unstetigkeitsstellen. Dann ist g integrierbar[2] , d. h.

$$\iint\limits_B g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

existiert.

Analog: Dreidimensionaler Fall

Voraussetzung wie oben, aber $B \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist g integrierbar und

$$\iiint\limits_B g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

existiert.

Satz 35: Berechnung mehrdimensionaler Integrale

$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$.

Dann gilt für $f : R \mapsto \mathbb{R}$:

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_{a_2}^{b_2} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Aufgabe:

$R = [0,1] \times [0,2] \qquad f(x,y) = xy^2 + 1$

$$\iint\limits_R xy^2 + 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left(\int\limits_0^1 xy^2 + 1\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \frac{x^2y^2}{2} + x \Big|_{x=0}^{1} \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{y^2}{2} + 1 - 0\,\mathrm{d}y = \frac{y^3}{6} + y \Big|_0^2 = \frac{8}{6} + 2 - 0 = \frac{20}{6}$$

[2]Hinweis: In diesem Skript wurde auf die ausführliche Wiedergabe der Herleitung der mehrdimensionalen Integration verzichtet.

1.5.2 Parametrisierung

Satz 36: „Beliebte Gebiete“

B kompakt. $\alpha, \beta : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar.

Sei $\alpha \leq \beta$, B wie in Abbildung 1.1, und $f : B \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

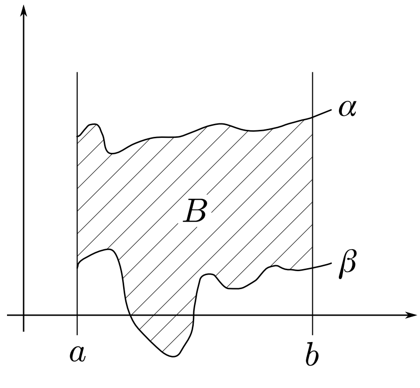

Abbildung 1.1: B mit α und β.

Bemerkungen:

1. Satz 36 gilt analog auch für den dreidimensionalen Fall.
2. Satz 36 gilt auch analog für B wie in Abbildung 1.2:

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

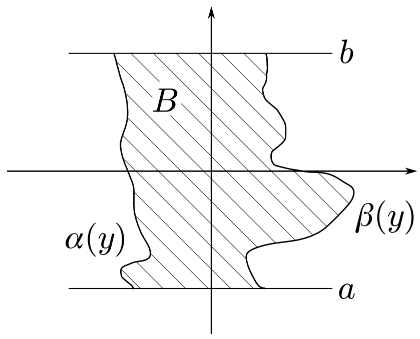

Abbildung 1.2: B mit α und β in Abhängigkeit von y.

3. Es gilt Linearität:

$$\iint\limits_B \alpha f + \beta g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint\limits_B f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta \iint\limits_B g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_B f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint\limits_B g\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{falls } f \leq g$$

4. Flächen- und Volumenintegral:

$$\iint\limits_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{Fläche von } B, \quad \iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \text{Volumen von } V$$

5. $B = B_1 \cup B_2$

   B,B_1,B_2 kompakte Menge mit glattem Rand.

$$\iint\limits_B f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{B_1} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{B_2} f\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Aufgabe:

B sei ein Dreieck in der x-y-Ebene mit den Eckpunkten $(0,0)$,$(2,0)$ und $(1,1)$.

Berechne

$$\iint\limits_B xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Lösung:

$$\begin{aligned} B &= B_1 \cup B_2 \\ B_1 &= \Big\{(x,y) \;\Big|\; 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x\Big\} \\ B_2 &= \Big\{(x,y) \;\Big|\; 1 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2-x\Big\} \end{aligned}$$

$$\iint\limits_B xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{B_1} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{B_2} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1\int\limits_0^x xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_1^2\int\limits_0^{2-x} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \frac{xy^3}{3}\bigg|_0^x \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{xy^3}{3}\bigg|_{2-x}^0 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 x^4 - 0 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_1^2 x(2-x)^3 - 0 \,\mathrm{d}x =$$

Nebenrechnung:

$$x(2-x)^3 = x(2-x)(4-4x+x^2) = x(8-8x+2x^2-4x+4x^2-x^3) = 8x-12x^2+6x^3-x^4$$

$$= \frac{1}{3}\frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 + \frac{1}{3}\Big(4x^2-4x^3+\frac{6}{4}x^4-\frac{x^5}{5}\Big)\bigg|_1^2 = \frac{1}{15}+\frac{1}{3}\Bigg(16-32+24-\frac{32}{5}-\Big(4-4+\frac{6}{4}-\frac{1}{5}\Big)\Bigg) =$$
$$= \frac{1}{15}+\frac{1}{3}\Big(8-\frac{128}{20}-\frac{30}{20}+\frac{4}{20}\Big) = \frac{1}{15}+\frac{1}{3}\Big(8-\frac{154}{20}\Big) = \frac{1}{15}+\frac{1}{3}\Big(\frac{3}{10}\Big) = \frac{1}{15}+\frac{1}{10} = \frac{2}{30}+\frac{3}{30} =$$
$$= \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

1.5.3 Transformationsregel

Satz 37: Die Transformationsregel im Zweidimensionalen

B, $R \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit glattem Rand, $f : B \mapsto \mathbb{R}$ stetig und es sei

$$\vec{x}\begin{pmatrix}\phi\\ \varrho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(\phi,\varrho)\\ y(\phi,\varrho)\end{pmatrix}$$

eine Abbildung mit stetigen partiellen Ableitungen, welche R surjektiv und (mit Ausnahme des Randes von R) injektiv auf B abbildet. Dann gilt:

$$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R f\big(\vec{x}(\phi,\varrho)\big)\,\big|\det \vec{x}\,'(\phi,\varrho)\big|\;\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\varrho$$

$$\big|\det \vec{x}\,'(\phi,\varrho)\big| = \left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial \phi}(\phi,\varrho) & \frac{\partial x}{\partial \varrho}(\phi,\varrho)\\ \frac{\partial y}{\partial \phi}(\phi,\varrho) & \frac{\partial y}{\partial \varrho}(\phi,\varrho)\end{pmatrix}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial \phi}(\phi,\varrho)\cdot\frac{\partial y}{\partial \varrho}(\phi,\varrho) - \frac{\partial x}{\partial \varrho}(\phi,\varrho)\cdot\frac{\partial y}{\partial \phi}(\phi,\varrho)\right|$$

Spezialfall: Polarkoordinaten

$$\vec{x}(\phi,\varrho) = \begin{pmatrix}\varrho\cos\phi\\ \varrho\sin\phi\end{pmatrix}, \text{ also gilt:}$$

$$\big|\det \vec{x}\,'(\phi,\varrho)\big| = \left|\det\begin{pmatrix}-\varrho\sin\phi & \cos\phi\\ \varrho\cos\phi & \sin\phi\end{pmatrix}\right| = \big|-\varrho\sin^2\phi - \varrho\cos^2\phi\big| = |\varrho| = \varrho$$

Transformationsregel für Polarkoordinaten:

$$\iint\limits_B f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R f\big(\vec{x}(\phi,\varrho)\big)\varrho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\varrho$$

Alle bisher für den $\mathbb{R}^2$ angestellten Überlegungen können sinngemäß auch auf den $\mathbb{R}^3$ fortgesetzt werden.

Insbesondere gilt: Das Volumen eines Spates (Parallelepipedes), welches von den 3 Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ h \\ k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

aufgespannt wird, ist:

$$\left| \det \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix} \right|$$

Satz: Die Transformationsregel im Dreidimensionalen

Seien B und $R \subset \mathbb{R}^3$ kompakte Mengen mit stückweise glattem Rand und $f : B \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei ferner

$$\vec{x}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Funktion, die R bis auf den Rand injektiv auf B abbildet. Dann gilt:

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_R f\big(\vec{x}(u,v,w)\big)\left|\det \vec{x}\,'(u,v,w)\right|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Bemerkung:

$$\det \vec{x}\,'(u,v,w) = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}$$

wird oft mit $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ bezeichnet und Funktionaldeterminante genannt.

Typische Koordinatentransformationen im $\mathbb{R}^3$

- 3-dimensionale Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten):

$$\begin{aligned} x &= r\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi \\ y &= r\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi \\ z &= r\cdot\sin\vartheta \end{aligned}$$

$$\phi : [0,\infty)\times[0,2\pi)\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \phi(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\vartheta\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\cos\vartheta\cdot\sin\varphi \\ r\cdot\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi & x_\vartheta \\ y_r & y_\varphi & y_\vartheta \\ z_r & z_\varphi & z_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta$$

- Zylinderkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos\varphi \\
y &= r \cdot \sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}
$$

$$
\phi : [0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \phi(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}
$$

$$
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r
$$

Beispielaufgabe

Berechnung des Kugelvolumens V.

$$
B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 < \varrho \right\}
$$

Übergang zu Kugelkoordinaten:

$$
R = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \varrho \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} 0 \le r \le \varrho \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varrho \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}
$$

Berechnung des Volumens:

$$
V = \iiint\limits_B 1 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_R 1 \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} \right| \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\varrho} 1 \cdot r^2 \cos\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta =
$$

$$
= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot \cos\vartheta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\varrho} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varrho^3}{3} \cos\vartheta \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varrho^3}{3} \cos\vartheta \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta =
$$

$$
= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varrho^3}{3} 2\pi \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{\varrho^3}{3} 2\pi \Big[\sin\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi\varrho^3
$$

1.6 Oberflächenintegrale

1.6.1 Das skalare Oberflächenintegral

Definition: Skalares Oberflächenintegral

Es sei $\vec{x} : B \mapsto \mathbb{R}^3$ eine glatte Parametrisierung, $B \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt und $F := \vec{x}(B)$ die von $\vec{x}$ parametrisierte glatte Fläche im $\mathbb{R}^3$. Betrachte die skalare Funktion $f : F \mapsto \mathbb{R}$. Wir definieren das skalare Oberflächenintegral:[3]

$$\iint\limits_F f \,\mathrm{d}O := \iint\limits_{\vec{x}} f \,\mathrm{d}O = \iint\limits_B f\big(\vec{x}(u,v)\big) \cdot \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Insbesondere erhält man für $f = 1$ die Oberfläche von F:

$$O(f) = \iint\limits_F 1 \,\mathrm{d}O = \iint\limits_B \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Beispiele

1. Oberfläche der Sphäre S mit Radius r_0. Es ist

$$\vec{x}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r_0 \cos\vartheta \cos\varphi \\ r_0 \cos\vartheta \sin\varphi \\ r_0 \sin\vartheta \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \begin{matrix} r_0 > 0 \\ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

mit:

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} -r_0 \sin\vartheta \cos\varphi \\ -r_0 \sin\vartheta \sin\varphi \\ r_0 \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} -r_0 \cos\vartheta \sin\varphi \\ r_0 \cos\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}\right)(\vartheta,\varphi) = -r_0^2 \cos\vartheta \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vartheta}(\vartheta,\varphi) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(\vartheta,\varphi)\right| = r_0^2 \left|\cos\vartheta\right| = r_0^2 \cos\vartheta$$

Damit gilt:

$$\mathrm{d}0 = r_0^2 \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

Also ist:

$$O(S) = \iint\limits_B 1\,\mathrm{d}O = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_0^2 \cos\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = (2\pi - 0)\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r_0^2 \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 4\pi r_0^2$$

[3] Es wird wieder auf die Wiedergabe der Herleitung des skalaren Oberflächenintegrals verzichtet.

2. Gegeben ist:

$$M = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| -2 \le x \le 4,\ y^2 + z^2 = 9 \right)$$

(Zylinder entlang der x-Achse von -2 bis 4 und Radius 3)

Wir parametrisieren M mit:

$$\vec{x}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} t \\ 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} t \in [-2, 4] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sin\varphi \\ 3\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(\varphi, t) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\varphi, t) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 3\cos\varphi - 0 \\ 0 - (-3\sin\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos\varphi \\ 3\sin\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(\varphi, t) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\varphi, t) \right| = 3$$

a) Berechnung der Oberfläche von M:

$$O(M) = \iint\limits_M 1 \,\mathrm{d}O = \int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{0}^{2\pi} 1 \cdot 3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}t = 3 \cdot 2\pi \cdot 6 = 36\pi$$

b) $f : M \mapsto R \quad f(x, y, z) = x(y^2 + z^2)$

$$\iint\limits_M f \,\mathrm{d}O = \int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{0}^{2\pi} f\big(\vec{x}(\varphi, t)\big) \cdot \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi}(\varphi, t) \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}(\varphi, t) \right| \mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{0}^{2\pi} t(3^2\cos^2\varphi + 3^2\sin^2\varphi) 3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{4}\int\limits_{0}^{2\pi} t \cdot 9 \cdot 3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}t = 27 \cdot 2\pi \int\limits_{-2}^{4} t \,\mathrm{d}t =$$

$$= 54\pi \cdot \frac{1}{2} t^2 \Big|_{-2}^{4} = 54\pi(8 - 2) = 324\pi$$

3. Oberfläche einer Rotationsfläche

Es sei $g(x) = x^2$, $x \in [0, h]$ und F sei die Fläche, die durch die Rotation des Graphen von g um die z-Achse entsteht (Rotationsparaboloid).

Parametrisierung von F:

$$\vec{x}(u, \varphi) = \begin{pmatrix} u\cos\varphi \\ u\sin\varphi \\ u^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} u \in [0, h] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 2u\end{pmatrix} \qquad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}(u,\varphi) = \begin{pmatrix}-u\sin\varphi\\ u\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u,\varphi) \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}(u,\varphi) = \begin{pmatrix}0-2u^2\cos\varphi\\ -2u^2\sin\varphi - 0\\ u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2u^2\cos\varphi\\ -2u^2\sin\varphi\\ u\end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u,\varphi) \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}(u,\varphi)\right| = \sqrt{4u^4\cos^2\varphi + 4u^4\sin^2\varphi + u^2} = u\sqrt{4u^2+1}$$

$$O(F) = \iint\limits_M 1\,\mathrm{d}O = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^h u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int\limits_0^h u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u =$$

Substitution: $t = 4u^2+1 \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}4u^2+1 \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 8u \quad \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{8u}$

$$= 2\pi\int\limits_{u=0}^{u=h} u\sqrt{t}\frac{\mathrm{d}t}{8u} = \frac{2\pi}{8}\int\limits_{u=0}^{u=h} t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\,\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=0}^{u=h} =$$

Resubstitution:

$$= \frac{\pi}{6}\left((4u^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^h\right) = \frac{\pi}{6}\left((4h^2+1)^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

1.6.2 Das Flussintegral

„Vereinbarung“

Die Parametrisierung $\vec{x} : B \mapsto F$ sei glatt, d. h. $B \subset \mathbb{R}^2$ kompakt mit glattem Rand. $\vec{x}$ sei stetig differenzierbar. $\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}$ sei linear unabhängig auf $B\setminus\partial B$. $\vec{x}$ sei weiterhin surjektiv auf B und injektiv auf $B\setminus\partial B$.

Außerdem gelte, dass der Normalenvektor $\vec{N} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}$ auf $B\setminus\partial B$ „nach außen schaut“.

Definition 38: Das Flussintegral

$\vec{x}$ sei glatte Parametrisierung (wie in der Vereinbarung), $\vec{v} : U \mapsto \mathbb{R}^3$, U offen mit $F = \vec{x}(B) \subset U$ und $\vec{v}$ sei stetig.

Dann ist das Flussintegral gegeben durch:

$$\iint\limits_F \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} := \iint\limits_B \vec{v}\big(\vec{x}(u,v)\big)\cdot\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}(u,v)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Beispiel

Strömung durch die Einheitskugeloberfläche.

Gegeben ist die Fläche

$$F = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, ||\vec{x}|| = 1 \right\}$$

und folgendes Vektorfeld (Strömung):

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \setminus \vec{0} \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||^3}$$

Parametrisierung:

$$\vec{x}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} = -\cos\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \cos\theta \sin\phi \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -\cos\theta \; \vec{x}(\theta, \phi)$$

Achtung: $\vec{x}(\theta, \phi)$ ist hier die Parametrisierung!

$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi}$ zeigt aber nach innen!

Daher ist

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} = \cos\theta \; \vec{x}(\theta, \phi)$$

der „richtige" Normalenvektor im Sinne der Vereinbarung.

$$\iint\limits_F \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{O} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \vec{v}\big(\vec{x}(\theta, \phi)\big) \cdot \cos\theta \cdot \vec{x}(\theta, \phi) \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta$$

$$\vec{v}\big(\vec{x}(\theta, \phi)\big) = \frac{\vec{x}(\theta, \phi)}{||\vec{x}(\theta, \phi)||^3}$$

$$\iint\limits_F \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{O} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta \frac{\vec{x}(\theta, \phi) \cdot \vec{x}(\theta, \phi)}{||\vec{x}(\theta, \phi)||^3} \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta \frac{||\vec{x}(\theta, \phi)||^2}{||\vec{x}(\theta, \phi)||^3} \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{||\vec{x}(\theta, \phi)||} \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} \cos\theta \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\theta = 2\pi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\pi \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi$$

1.6.3 Der Satz von Gauß

Satz 39: Satz von Gauß

$K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand, der eine glatte Parametrisierung zulässt (wie in Definition 38). Sei $\vec{v} : U \mapsto \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $K \subset U$ und $\vec{v}$ sei stetig partiell integrierbar. Dann gilt:

$$\iiint\limits_K \operatorname{div} \vec{v} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iint\limits_{\partial K} \vec{v} \,\mathrm{d}\vec{O}$$

„Quellen + Senken in K“ = „Zufluss - Abfluss über ∂K“

Aufgaben

1. Aufgabe:

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z^2 + y \\ y^2 \\ -yz \end{pmatrix}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

Bestimme den Fluss ∂K.

Lösung:

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{v} \,\mathrm{d}\vec{O} = \iiint\limits_K \operatorname{div} \vec{v} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iiint\limits_K 0 + 2y - y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-1}^1 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 2y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \int_0^1 y^2 \Big|_0^1 \,\mathrm{d}z = \int_0^1 \,\mathrm{d}z = 1$$

2. Aufgabe:

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^z + y \\ x + z \\ 2x^2 \end{pmatrix}$$

K sei ein Kegel mit Boden

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0 \right\}$$

und Spitze in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Es sei M der Mantel von K, so dass gilt $\partial K = B \cup M$ und es möge gelten:

$$\iint\limits_B \vec{v} \,\mathrm{d}\vec{O} = -\frac{\pi}{2}$$

Berechne $\iint\limits_{M} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O}$.

Lösung:

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} = \iint\limits_{M} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} + \iint\limits_{B} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O}$$

$$\iiint\limits_{K} \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_{K} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

$$\iint\limits_{M} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} + \iint\limits_{B} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} = 0$$

$$\iint\limits_{M} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\iint\limits_{M} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} = \frac{\pi}{2}$$

1.6.4 Der Satz von Stokes

Es sei $F \subset \mathbb{R}^3$ eine Flächen mit „gutem“ Rand ∂F, d. h. die Fläche sei wie in Definition 38 glatt parametrisiert. Zusätzlich sei die Parametrisierung auf einem Rechteck, Kreis oder Ring parametrisiert.

„Durchlaufe den Rand des Definitionsbereiches der Parametrisierung mathematisch positiv (gegen der Uhrzeigersinn).“ $\rightsquigarrow$ Orientierung von $\vec{\gamma}$.

Satz 40: Satz von Stokes

Sei F wie oben, $\partial F = \vec{\gamma}$ sei wie oben orientiert. Dann gilt:

$$\iint\limits_{F} \operatorname{rot}\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} = \int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$$

Aufgaben

1. Aufgabe:

   Es sei K der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufene Rand folgender Fläche:

   $$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ z = 0 \right\}$$

   Ferner sei:

   $$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Berechne $\int\limits_{K} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$ mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Lösung:

Q ist ein Quadrat mit Seitenlänge 2, das in der x-y-Ebene liegt. Und es gilt:

$$\int_K \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint_Q \operatorname{rot}\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \operatorname{rot}\begin{pmatrix}-y\\x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-0\\0-0\\1-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

Wir parametrisieren Q mittels:

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c}-1 \le u \le 1\\ -1 \le v \le 1\end{array}$$

$$\vec{x} : B \mapsto Q \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c}-1 \le u \le 1\\ -1 \le v \le 1\end{array}\right\}$$

$$\int_K \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint_Q \operatorname{rot}\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} = \iint_B \operatorname{rot}\vec{v}\big(\vec{x}(u,v)\big)\left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\right)(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 8$$

2. Gegeben sei eine Kurve

$$\vec{\gamma} : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix}2\cos t\\2\sin t\\0\end{pmatrix}$$

und ein Vektorfeld:

$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad \vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\x\\z\end{pmatrix}$$

Aufgabe:

a) Man berechne $\operatorname{rot}\vec{v}$.

b) Man berechne $\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s}$ mit Hilfe des Satzes von Stokes, indem man ein Oberflächenintegral über eine geeignete Fläche bestimmt.

Lösung:

Geeignete Fläche:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix}r\cos\phi\\r\sin\phi\\0\end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c}0 \le r \le 2\\ 0 \le \phi \le 2\pi\end{array}\right\}$$

Satz von Stokes:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint_K \operatorname{rot}\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O}$$

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigentlich ist die Aufgabe hier bereits gelöst, da das Ergebnis auf der Hand liegt. „Zur Übung“ führen wir trotzdem eine Parametrisierung durch und berechnen das Integral:

$$\vec{x} : [0,2] \times [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3 \qquad \vec{x}(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial r}(r,\phi) \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos^2\phi + r\sin^2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Also gilt:

$$\int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{K} \operatorname{rot}\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{O} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial\vec{x}}{\partial r} \times \frac{\partial\vec{x}}{\partial\phi}\right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 0$$

1.7 Übersicht Integrale

Es folgt nun eine Übersicht über alle behandelten Integrale:[4]

1. $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.
   - **Integral:** $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
   - **Name:** eindimensionales/gewöhnliches Riemannintegral
   - **Berechnung:** theoretisch mittels Ober- bzw. Untersummen, praktisch mittels Stammfunktion für f und Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
   - **Interpretation:** Für positives f ist das Integral die Größe der Fläche, die von den Geraden $x = a$, $x = b$, $y = 0$ und $y = f(x)$ eingeschlossen wird. („Fläche unter dem Graphen")
   - **Spezialfall:** $f(x) = 1$: Der Wert des Integrals ist die Länge des Integrationsintervalls.
2. $f : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.
   - **Integral:** $\iint\limits_D f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$ oder auch $\iint\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x$ (wenn die Dimension klar ist)
   - **Name:** doppeltes Riemannintegral, Doppelintegral
   - **Berechnung:** theoretisch mittels Ober- bzw. Untersummen, praktisch durch Iterieren, also Hintereinanderausführung von eindimensionalen Integrationen (z. B. $\int\limits_{x=c}^{d} \int\limits_{y=g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, wobei $D = \{ (x, y) |\, c \leq x \leq d, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ (Normalbereich)).
   - **Interpretation:** Für positives f ist das Integral das Volumen des Körpers, der die Menge D in der x-y-Ebene als Grundfläche und den Graphen von f als Deckfläche hat.
   - **Spezialfall:** $f(x, y) = 1$: Der Wert des Integrals ist der Flächeninhalt von D.
3. $f : D \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$.
   - **Integral:** $\iiint\limits_D f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z)$ oder auch $\int\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x$
   - **Name:** dreifaches Riemannintegral, Dreifachintegral
   - **Berechnung:** praktisch durch Iterieren, also Hintereinanderausführung von eindimensionalen Integrationen (z. B. $\int\limits_{x=c}^{d} \int\limits_{y=g(x)}^{h(x)} \int\limits_{z=k(y)}^{m(y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$, wobei $D = \{ (x, y, z) |\, c \leq x \leq d, g(x) \leq y \leq h(x), k(y) \leq z \leq m(y)\}$).
   - **Interpretation:** Für positives f kann f als (ortsabhängige) Dichte des Körpers D angesehen werden. Das Integral ist dann die Masse des Körpers D.
   - **Spezialfall:** $f(x, y, z) = 1$: Der Wert des Integrals ist das Volumen von D.
4. $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.
   - **Integral:** $\int\limits_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \mathrm{d}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oder auch $\int\limits_D f(x)\,\mathrm{d}x$ (wenn der Kontext klar ist)

[4] Dank für das Bereitstellen dieser Übersicht als .tex-Datei geht an Dr. Johannes Christof.

- **Name:** n-faches Riemannintegral
- **Berechnung**: durch Iterieren
- **Interpretation**: n-dimensionales Volumen/Masse

5. $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\vec{\gamma} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$.
   - **Integral:** $\int\limits_{\vec{\gamma}} f \, \mathrm{d}s$
   - **Name:** Kurvenintegral 1. Art
   - **Berechnung:** Das Symbol $\int\limits_{\vec{\gamma}} f \, \mathrm{d}s$ wird zu $\int\limits_a^b f\big(\vec{\gamma}(t)\big) \, ||\vec{\gamma}\,'(t)|| \, \mathrm{d}t$ und ist somit ein Doppelintegral.
   - **Interpretation:** Für positives f kann f als Dichte interpretiert werden. Das Integral ist dann die Masse der Kurve $\vec{\gamma}$.
   - **Spezialfall:** $f = 1$ (konstant): Der Wert des Integrals ist die Länge der Kurve $\vec{\gamma}$.
6. $\vec{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $\vec{\gamma} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$.
   - **Integral**: $\int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{f} \, \mathrm{d}\vec{s}$
   - **Name:** Kurvenintegral 2. Art
   - **Berechnung:** Das Symbol $\int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{f} \, \mathrm{d}\vec{s}$ wird zu $\int\limits_a^b \big\langle f\big(\vec{\gamma}(t)\big), \vec{\gamma}\,'(t) \big\rangle \, \mathrm{d}t$ und ist somit ein Doppelintegral. Eventuell ist auch eine Berechnung über eine Stammfunktion von $\vec{f}$ möglich.
   - **Interpretation:** $\vec{f}$ ist ein Kraftvektor, $\int\limits_{\vec{\gamma}} \vec{f} \, \mathrm{d}\vec{s}$ ist dann die Arbeit, die entlang des Weges $\vec{\gamma}$ verrichtet wird.
7. $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $F = \vec{r}(D)$ Fläche
   - **Integral**: $\iint\limits_F f \, \mathrm{d}O$
   - **Name:** Oberflächenintegral 1. Art
   - **Berechnung:** Das Symbol $\iint\limits_F f \, \mathrm{d}O$ wird zu $\iint\limits_D f(\vec{r}(u, v)) \, ||\vec{r_u} \times \vec{r_v}|| \, \mathrm{d}(u, v)$ und ist somit ein Doppelintegral.
   - **Interpretation:** Für positives f ist f eine Massen- oder Ladungsverteilung, das Integral ist dann die Gesamtmasse oder Gesamtladung.
   - **Spezialfall:** $f = 1$ (konstant): Der Wert des Integrals ist der Flächeninhalt von F.
8. $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$, $F = \vec{r}(D)$ Fläche
   - **Integral:** $\iint\limits_F \vec{f} \, \mathrm{d}\vec{O}$
   - **Name:** Oberflächenintegral 2. Art
   - **Berechnung:** Das Symbol $\iint\limits_F \vec{f} \, \mathrm{d}\vec{O}$ wird zu $\iint\limits_D \big\langle f\big(\vec{r}(u, v)\big), \vec{r_u} \times \vec{r_v} \big\rangle \, \mathrm{d}(u, v)$ und ist somit ein Doppelintegral.

- **Interpretation:** $\vec{f}$ ist der Geschwindigkeitsvektor einer Strömung, das Integral ist dann der Gesamtfluss durch die Fläche D.

Bemerkung: Damit die Integrale sinnvoll definiert sind, müssen die beteiligten Funktionen natürlich bestimmte Eigenschaften besitzen (z. B. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Beschränktheit).

2 Differentialgleichungen

2.1 Einführung

2.1.1 Einführende Beispiele

Beispiele für Differentialgleichungen:

1. Beispiel („exponentiell wachsende Mäusepopulation“):

$$y'(x) = ay(x) \qquad\qquad a \in \mathbb{R}$$

   (homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

   Lösung:
$$y(x) = e^{ax}$$

   Beweis:
$$y'(x) = ae^{ax} = ay(x)$$

   Aber diese Lösung ist nicht eindeutig. Zum Beispiel löst

$$y(x) = 2e^{ax}$$

   ebenfalls die Differentialgleichung.

   Zusätzlich sei gegeben:
$$y(0) = \alpha \qquad \text{(Anfangswertproblem)}$$

   Also folgt: $y'(x) = ay(x)$ mit dem Anfangswertproblem $y(0) = \alpha \cdot e^0 = \alpha$ hat genau eine Lösung:
$$y(x) = \alpha \cdot e^{ax}$$

2. Pendel: Rückstellkraft proportional zur Auslenkung, Newton: Beschleunigung $\ddot{s}$ proportional zur Kraft:
$$\ddot{s}(t) + \omega^2 s(t) = 0$$

   (homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

3. Schaltung von Spule und Widerstand (L-R-Schaltung):

$$L\dot{I}(t) + RI(t) = U(t)$$

   (inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten)

4. Logistische Differentialgleichungen („Ausbreitung von Krankheiten, beschränktes Wachstum von Bevölkerungen“):
$$y'(x) = ay(x) - by^2(x)$$

2.1.2 Trennbare Differentialgleichungen

f, g stetig, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $g : J \mapsto \mathbb{R}$, I, J offene Intervalle. Eine trennbare Differentialgleichung hat dann die Form:

$$y'(x) = f(x)g(y)$$

Lösung:

1. Schritt: Falls gilt $g(\eta) = 0 \quad (\eta \in J)$

   $\Rightarrow y(x) = \eta$ ist bereits Lösung, denn:

   $$y' = 0 = f(x)g(\eta) = f(x)g\Big(y(x)\Big) = f(x)g(y)$$

   (stationäre Lösung)

2. Schritt: Ist $g(\eta) \neq 0$, so finde um x_0 mit $y(x_0) = \eta$ lokal (d. h. in einer Umgebung von x_0 eine Lösung der Differentialgleichung.

Hilfreiche Umformungen

$$\int \frac{y'}{y} = \ln y \qquad \left(-\frac{1}{y}\right)' = \frac{y'}{y^2} \qquad \left(-\frac{2}{\sqrt{y}}\right)' = \left(-\frac{2}{y^{\frac{1}{2}}}\right)' = \frac{y'}{y^2}$$

Aufgabe

Man berechne die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichung $y' = 2xy^{\frac{3}{2}}$ und löse das Anfangswertproblem $y(0) = 1$.

Lösung:

$$f(x) = 2x \qquad g(y) = y^{\frac{3}{2}}$$

1. Schritt:

   $g(y) = 0 \quad \Rightarrow y = 0 \quad \Rightarrow y \equiv 0$ ist eine Lösung.

2. Schritt: $y > 0$ ($y < 0$ wird nicht betrachtet, da die Gleichung sonst nicht erklärt ist.)

   $$y' = 2xy^{\frac{3}{2}}$$
   $$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{3}{2}}} = \int 2x\,\mathrm{d}x$$
   $$\frac{-2}{\sqrt{y}} = x^2 + c$$
   $$\frac{4}{y} = (x^2 + c)^2 \quad \Rightarrow y(x) = \frac{4}{(x^2+c)^2} \quad \text{erklärt auf: } \big\{\, x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \neq -c \big\}$$

   Anfangswertproblem:

   $$y(0) = 1$$
   $$y(0) = \frac{4}{c^2} \quad \Rightarrow c = \pm 2$$

   Lösung für das Anfangswertproblem:

   $$y(x) = \frac{4}{(x^2+2)^2}$$

2.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.2.1 Definition

Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung hat die Form

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

$a, f : I \mapsto \mathbb{R}$, I offenes Intervall, a,f, stetige Funktionen.

Diese Gleichung heißt homogen, falls $f = 0$, d. h. $y' + a(x)y = 0$. Ansonsten heißt die Gleichung inhomogen.

2.2.2 Lösen einer homogenen Gleichung

Betrachte die homogene Gleichung:

$$y' = -a(x)y$$

1. Schritt: $y \equiv 0$ ist (Sonder-)Lösung.
2. Schritt: $y \neq 0$

$$\int \frac{y'}{y}\,\mathrm{d}x = \int -a(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\ln y = -A(x) + c$$

wobei A die Stammfunktion von a ist. Also gilt:

$$y(x) = e^{-A(x)+c} = \alpha e^{-A(x)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Satz 42: Lösung der homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung

Alle Lösungen der obigen homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

sind gegeben durch

$$y_h(x) = \alpha e^{-A(x)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

wobei A eine Stammfunktion von a ist.

Beispiel:

$$y' + \frac{1}{x}y = 0 \qquad x \in (0, \infty)$$

Lösung:

Bestimme $A(x)$:

$$A(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + \tilde{c}$$

Wir setzen $\tilde{c} = 0 \Rightarrow A(x) = \ln x$.

$$y_h(x) = \alpha e^{-\ln x} = \alpha \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{\alpha}{x}$$

$y_h(x) = \frac{\alpha}{x}$ ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ Lösung.

2.2.3 Lösen einer inhomogenen Gleichung

Satz 43: Lösung der inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung

$a, f : I \mapsto \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$$

hat die Lösung

$$y(x) = \alpha e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} e^{A(t)} f(t) \,\mathrm{d}t \right)$$

wobei A die Stammfunktion von a ist, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$.[1]

Lösungsschema für inhomogene Gleichungen

1. Schritt: Bestimme A mit $A'(x) = a(x)$.

$$\rightsquigarrow \quad y_h(x) = \alpha e^{-A(x)} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

2. Schritt: Bestimme y_p mit Hilfe der „Variation der Konstanten“:

$$y_p(x) = \alpha(x) e^{-A(x)} \qquad \text{(Ansatz)}$$

3. Schritt: Allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \tag{$*$}$$

4. Schritt: Ist noch ein Anfangswertproblem gegeben, (z. B. $y(0) = 1$), so setzt man diesen in $(*)$ ein und bestimmt so α.

Beispiele:

1. Aufgabe:

$$y' + \frac{1}{x} y = x^3 \qquad x > 0$$

1. Schritt:

$$A(x) = \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln x$$
$$y_h(x) = \alpha e^{-\ln x} = \frac{\alpha}{x}$$

2. Schritt: Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = \frac{\alpha(x)}{x}$$

[1] Hinweis: Auf die Wiedergabe des Beweises, der in der Vorlesung durchgeführt wurde, wird hier verzichtet.

Einsetzen:

$$y_p' + \frac{1}{x} y_p = x^3$$
$$\left(\frac{\alpha(x)}{x}\right)' + \left(\frac{\alpha(x)}{x^2}\right) = x^3$$
$$\frac{\alpha'(x) \cdot x - \alpha(x)}{x^2} + \frac{\alpha(x)}{x^2} = x^3$$
$$\frac{\alpha'(x) \cdot x}{x^2} = x^3$$
$$\alpha'(x) \cdot x = x^5$$
$$\alpha'(x) = x^4$$
$$\alpha(x) = \frac{x^5}{5}$$
$$y_p(x) = \frac{\alpha(x)}{x} = \frac{x^5}{5x} = \frac{x^4}{5}$$

3. Schritt:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{x^4}{5} \qquad x > 0$$

2. Aufgabe:

$$y' + 2y = 3e^{5x} + x^3$$

1. Schritt:

$$a(x) = 2 \qquad A(x) = 2x \qquad y_h(x) = \alpha e^{-2x}$$

2. Schritt:

$$y_p = \alpha(x) e^{-2x}$$
$$y_p' + 2y_p = 3e^{5x} + x^3$$
$$\alpha'(x)e^{-2x} + (-2)e^{-2x}\alpha(x) + 2\alpha(x)e^{-2x} = 3e^{5x} + x^3$$
$$\alpha'(x)e^{-2x} = 3e^{5x} + x^3$$
$$\alpha'(x) = 3e^{7x} + x^3 e^{2x}$$
$$\alpha(x) = \frac{3}{7}e^{7x} + \int x^3 e^{2x}\,\mathrm{d}x$$

Nebenrechnung:

$$\int x^3 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \int x e^{2x}\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4}\right)e^{2x} + \frac{3}{2}\int x e^{2x}\,\mathrm{d}x = e^{2x}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}e^{2x} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= e^{2x}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4}\right) - \frac{e^{2x}}{4} \cdot \frac{3}{2} = e^{2x}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}\right)$$

Also gilt:

$$\alpha(x) = \frac{3}{7}e^{7x} + e^{2x}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}\right)$$
$$y_p(x) = \frac{3}{7}e^{5x} + \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}$$
$$y(x) = \alpha e^{-2x} + \frac{3}{7}e^{5x} + \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{4} - \frac{3}{8}$$

3. Aufgabe:

$$y'(x) + (\sin x)y(x) = \sin x$$
$$y(0) = 1$$

1. Schritt:

$$a(x) = \sin x \qquad A(x) = -\cos x \qquad y_h(x) = \alpha e^{\cos x}$$

2. Schritt:

$$y_p(x) = \alpha(x)e^{\cos x}$$

In die Differentialgleichung einsetzen:

$$y_p' + (\sin x)y = \alpha'(x)e^{\cos x} + \alpha(x)(-\sin x)e^{\cos x} + \sin x\alpha(x)e^{\cos x} = \sin x$$
$$\alpha'(x)e^{\cos x} = \sin x$$
$$\alpha'(x) = \sin xe^{-\cos x}$$
$$\alpha(x) = e^{-\cos x}$$
$$y_p = \alpha(x)e^{\cos x} = e^{-\cos x}e^{\cos x} = 1$$

3. Schritt:

$$y = y_h + y_p = \alpha e^{\cos x} + 1$$

4. Schritt: $y(0) = 1$ löst das Anfangswertproblem.

$$1 = y(0) = \alpha e^{\cos 0} + 1$$
$$1 = \alpha e^1 + 1$$
$$0 = \alpha e$$
$$\alpha = 0$$

2.3 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

2.3.1 Satz von Picard-Lindelöf

Satz 44: Satz von Picard-Lindelöf

Es seien $\vec{G} : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, U offen und $(t_0, \vec{x_0}) \in U$.

Dann ist

$$\left.\begin{array}{r} \dot{\vec{x}} = G(t, \vec{x}) \\ \text{mit Anfangswert } \vec{x}(t_0) = \vec{x_0} \end{array}\right\} (**)$$

eindeutig lösbar. Es gilt:

1. Es gibt ein offenes Intervall $J \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in J$ und $(**)$ hat eine Lösung $\vec{x} : J \mapsto \mathbb{R}^n$ mit $\big(t, \vec{x}(t)\big) \in U$ für alle $t \in J$. („In der Nähe des Anfangswertes t_0 existiert eine Lösung.")
2. Jede weitere Lösung $\tilde{\vec{x}}$ auf einem Intervall um t_0 ist eine Einschränkung der Lösung aus 1). („Eindeutigkeit")

2.3.2 Homogene Differentialgleichungssysteme

Gewöhnliche Differentialgleichungssysteme

Ab jetzt betrachten wir:

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ \dot{x_2}(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) \\ &\vdots \\ \dot{x_n}(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) \end{aligned}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = A(t)\vec{x}(t)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$$
$$\dot{\vec{x}}(t) = G(t, \vec{x})$$

Satz 45: Satz von Picard-Lindelöf für homogene Differentialgleichungssysteme

Sind $A : I \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, I offen, $I \subset \mathbb{R}$ und $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$$
$$\vec{x}(t_0) = \vec{\eta_0}$$

für jedes $\vec{\eta_0} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ genau eine auf I definierte Lösung („globale Existenz und Eindeutigkeit").

Zusatz: Es genügt, dass A stetig ist.

Beispiel:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x_1}(t) \\ \dot{x_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{Anfangswertproblem: } t_0 = 0 \quad \vec{\eta_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\dot{x_1} = x_1 \quad \text{Lösung: } \alpha e^t$$
$$\dot{x_2} = 2x_2 \quad \text{Lösung: } \beta e^{2t}$$
$$\vec{x}(t) = \alpha \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$$

Anfangswertproblem:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \ \alpha = 1 \ \beta = 2$$

Eindeutige Lösung auf $\mathbb{R}$ ist:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

2.3.3 Inhomogene Differentialgleichungssysteme

Es sei $\vec{x_1}$ die (nach Satz 45) eindeutige Lösung von $\dot{\vec{x_1}} = A(t)\vec{x_1}$ zum Anfangswert $\vec{x_1}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es sei $\vec{x_2}$ die (nach Satz 45) eindeutige Lösung von $\dot{\vec{x_2}} = A(t)\vec{x_2}$ zum Anfangswert $\vec{x_2}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\vdots$

Es sei $\vec{x_n}$ die (nach Satz 45) eindeutige Lösung von $\dot{\vec{x_n}} = A(t)\vec{x_n}$ zum Anfangswert $\vec{x_n}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Satz 46: Lineare Unabhängigkeit der Lösungen von Differentialgleichungssystemen

Die Funktionen $\vec{x_1}, \ldots \vec{x_n}$ sind linear unabhängig.

Es gilt:

1. Superposition: Linearkombination von Lösungen von $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$ sind wieder Lösungen von $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$.
2. Es gibt n linear unabhängige Lösungen von $\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$.

3. Die eindeutige Lösung von
$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$$
$$\vec{x}(t_0) = \vec{\eta_0}$$
lässt sich als Linearkombination von $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$ schreiben.

Konkret:

$$\vec{\eta_0} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{x}(t) = \eta_1 \vec{x_1}(t) + \eta_2 \vec{x_2}(t) + \ldots + \eta_n \vec{x_n}(t)$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$$

Definition:

$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$ heißt homogenes lineares Gleichungssystem 1. Ordnung.

$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ heißt inhomogenes lineares Gleichungssystem 1. Ordnung.

Satz 47: Satz von Picard-Lindelöf für inhomogene Differentialgleichungssysteme

(Existenz und Eindeutigkeit des linearen Differentialgleichungssystems)

A wie oben, $\vec{b} : I \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $t_0 \in I$, so hat das (inhomogene) Anfangswertproblem
$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t_0)$$
$$\vec{x}(0) = \vec{\eta_0}$$
für jedes $\vec{\eta_0} \in \mathbb{R}^n$ genau eine auf I definierte Lösung.

Satz 48: Lösen von Differentialgleichungssystemen durch Superposition

A wie oben.
$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t_0) \qquad (**)$$
Sind $\vec{x_1}, \dots \vec{x_n}$ linear unabhängige Lösungen für die homogene Gleichung
$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}$$
so sind alle Lösungen $\vec{x}$ von $(**)$ gegeben durch
$$\vec{x} = \vec{x_p} + \underbrace{c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + \ldots + c_n\vec{x_n}}_{\text{homogene Lösung}}$$
mit beliebigen Konstanten $c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$ und $\vec{x_p}$ (die sogenannten Partikulärlösung) ist eine Lösung vom inhomogenen System $(**)$. Kurz:
$$\vec{x} = \vec{x_p} + \vec{x_h}$$

Zusatz: (Variation der Konstanten)

Es gilt
$$\vec{x_p}(t) = c_1(t)\vec{x_1}(t) + c_2(t)\vec{x_2}(t) + \ldots + c_n(t)\vec{x_n}(t)$$
wobei $c_1(t), \dots c_n(t)$ folgendes erfüllen:
$$\begin{pmatrix} \vec{x_1} & \vec{x_2} & \cdots & \vec{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_n' \end{pmatrix}$$

2.3.4 Lösen mit Eigenwerten und Eigenvektoren

Satz 49: Lösen von Differentialgleichungssystemen mit Eigenwerten und Eigenvektoren

Sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Matrix (konstante Koeffizienten). Betrachte:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \vec{x} + \vec{b}(t)$$

Es seien $\lambda_1, \dots \lambda_k$ $(k \leq n)$ die reellen Eigenwerte von A mit zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v_1}, \dots \vec{v_k}$ (d. h. $A\vec{v_j} = \lambda_j \vec{v_j}$, $\vec{v_j} \neq 0$). Dann sind

$$\vec{x_1}(t) = \vec{v_1} e^{\lambda_1 t},\ \vec{x_2}(t) = \vec{v_2} e^{\lambda_2 t},\ \dots\ \vec{x_k}(t) = \vec{v_k} e^{\lambda_k t}$$

Lösungen des homogenen System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

Bemerkung: Eine symmetrische Matrix A hat n reelle Eigenwerte und die algebraische Vielfachheit stimmt für jeden Eigenwert mit der geometrischen Vielfachheit überein.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

Bestimmung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda I) = 0 = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)^2 - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$$
$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 3$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$:

$$\big(A - (-1)I\big) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2x + 2y = 0 \ \Rightarrow\ x = -y$$
$$\cancel{2x + 2y = 0}$$

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 3$:

$$\left(A - 3I\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{-2x + 2y = 0}$$

$$2x - 2y = 0 \ \Rightarrow \ x = y$$

$$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\vec{x_1}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-1t}$$

$$\vec{x_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$\vec{x_h} = \alpha\vec{x_1}(t) + \beta\vec{x_2}(t) = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

Behandlung von komplexen Eigenwerten

Ist A reelle Matrix, so tauchen die nichtrellen Eigenwerte als konjugiert komplexe Pärchen $\{\lambda, \bar{\lambda}\}$ auf. Bei jedem dieser Pärchen kann man eine Lösung „vergessen“. Von der Anderen bildet man „wie gewohnt“ die komplexe Lösung $\vec{z}$ und bildet davon den Real- und Imaginärteil.

Beispiel:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}$$

Lösung:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1$$

$$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \imath$$

$$1 - \imath \text{ „wegwerfen“}$$

Eigenvektoren zu $\lambda = 1 + \imath$:

$$\left(A - (1+\imath)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\imath & -1 \\ 1 & -\imath \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-\imath x - y = 0 \qquad\qquad y = -\imath x$$

$$x - \imath y = 0 \qquad\qquad \imath y = x \quad |\cdot\imath$$

$$-y = \imath x$$

$$\text{Eigenvektor: } \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix} e^{(1+\imath)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix} e^t e^{\imath t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix} e^t (\cos t + \imath \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t + \imath \sin t \\ -\imath \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{aligned} \vec{x_1}(t) &= \operatorname{Re} \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t \\ \vec{x_2}(t) &= \operatorname{Im} \vec{z}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^t \\ \vec{x_h}(t) &= \alpha \vec{x_1}(t) + \beta \vec{x_2}(t) = \alpha \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^t + \beta \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^t \end{aligned}$$

Problem: „Zu wenig“ Eigenvektoren

Sei λ_1 ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit $\neq$ geometrischer Vielfachheit. Dann bestimme $\vec{v_1}$ als Eigenvektor zu λ_1 und

$$\left.\begin{array}{r} \vec{w_1} \text{ mit } (A - \lambda_1 I)\vec{w_1} = \vec{v_1} \\ \tilde{\vec{w_1}} \text{ mit } (A - \lambda_1 I)\tilde{\vec{w_1}} = \vec{w_1} \\ \tilde{\tilde{\vec{w_1}}} \text{ mit } (A - \lambda_1 I)\tilde{\tilde{\vec{w_1}}} = \tilde{\vec{w_1}} \\ \vdots \end{array}\right\} \text{„Hauptvektoren“}$$

und erhalte die Lösungen:

$$\begin{aligned} \vec{x_1}(t) &= e^{\lambda_1 t} \vec{v_1} \\ \vec{x_2}(t) &= e^{\lambda_1 t} \left(\vec{w_1} + \frac{t}{1!} \vec{v_1} \right) \\ \vec{x_3}(t) &= e^{\lambda_1 t} \left(\tilde{\vec{w_1}} + \frac{t}{1!} \vec{w_1} + \frac{t^2}{2!} \vec{v_1} \right) \\ \vec{x_4}(t) &= e^{\lambda_1 t} \left(\tilde{\tilde{\vec{w_1}}} + \frac{t}{1!} \tilde{\vec{w_1}} + \frac{t^2}{2!} \vec{w_1} + \frac{t^3}{3!} \vec{v_1} \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1-\lambda)^4 = 0$$

Eigenwert: $\lambda_1 = 1$.

Berechnung der Eigenvektoren zu λ_1:

$$(A-1I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad x_2=x_3=x_4=0$$

Eigenvektor:

$$\vec{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

gesucht: $\vec{w_1}$ mit $(A-1I)\vec{w_1}=\vec{v_1}$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\\w_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\vec{w_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

gesucht: $\tilde{\vec{w_1}}$ mit $(A-1I)\tilde{\vec{w_1}}=\vec{w_1}$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{w_1}\\\tilde{w_2}\\\tilde{w_3}\\\tilde{w_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\tilde{\vec{w_1}}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

gesucht: $\tilde{\tilde{\vec{w_1}}}$ mit $(A-1I)\tilde{\tilde{\vec{w_1}}}=\tilde{\vec{w_1}}$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\tilde{w_1}}\\\tilde{\tilde{w_2}}\\\tilde{\tilde{w_3}}\\\tilde{\tilde{w_4}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\tilde{\tilde{\vec{w_1}}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Lösungen:

$$\vec{x_1}(t) = \vec{v_1}e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$$\vec{x_2}(t) = (\vec{w_1} + t\vec{v_1})e^t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$$\vec{x_3}(t) = \left(\tilde{\vec{w_1}} + t\vec{w_1} + \frac{t^2}{2!}\vec{v_1}\right) e^t = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2!} \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$$\vec{x_4}(t) = \left(\tilde{\tilde{\vec{w_1}}} + t\tilde{\vec{w_1}} + \frac{t^2}{2!}\vec{w_1} + \frac{t^3}{3!}\vec{v_1}\right) e^t = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{3!} \\ \frac{t^2}{2!} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

2.4 Differentialgleichungen höherer Ordnung

2.4.1 Transformation in System 1. Ordnung

Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung ($a_1, \ldots, a_n, b$ stetige Funktionen):

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + a_2(t)x^{(n-2)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = b(t) \qquad (*)$$

Setze:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x(t) & \dot{x_1}(t) &= x_2(t) \\
x_2(t) &= \dot{x}(t) & \dot{x_2}(t) &= x_3(t) \\
x_3(t) &= \ddot{x}(t) & \dot{x_3}(t) &= x_4(t) \\
&\vdots & &\vdots \\
x_n(t) &= x^{(n-1)}(t) & \dot{x_n}(t) &= x^{(n)}(t) = \\
& & &= -a_1(t)x^{(n-1)}(t) - a_2(t)x^{(n-2)}(t) - \ldots - a_n(t)x(t) + b(t)
\end{aligned}$$

$$\dot{x_n}(t) = -a_1(t)x_n(t) - a_2(t)x_{n-1}(t) - \ldots - a_n(t)x_1(t) + b(t)$$

$$\overset{\bullet}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ -a_1(t)x_n(t) - a_2(t)x_{n-1}(t) - \ldots - a_n(t)x_1(t) + b(t) \end{pmatrix}$$

$$\overset{\bullet}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

(lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, inhomogen)

Jede Lösung des Systems liefert eine Lösung der Differentialgleichung ($*$).

2.4.2 Existenz, Eindeutigkeit und Berechnung von Lösungen

Satz 50: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

$a_1, \ldots, a_n, b$ stetige Funktionen. Betrachte folgendes Anfangswertproblem:

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = b(t)$$

$$\begin{pmatrix} x(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Dann hat ($**$) genau eine Lösung.

Satz 51: Lösungen einer Differentialgleichung n-ter Ordnung

$a_1, \ldots, a_n, b$ seien stetig.

Betrachte folgende Probleme:

$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = 0 \qquad \text{(hom)}$$
$$x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)x(t) = b(t) \qquad \text{(inhom)}$$

Die homogene Gleichung (hom) hat n linear unabhängige Lösungen $x_1, \ldots x_n$. Jede Lösung von (hom) ist durch

$$x_h(t) = c_1x_1(t) + \ldots + c_nx_n(t)$$

gegeben.

Jede Lösung von (inhom) ist durch

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

gegeben, wobei x_p eine Partikulärlösung von (inhom) ist.

2.4.3 Der Exponentialansatz

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\lambda t} \\ y'(t) &= \lambda e^{\lambda t} \\ y''(t) &= \lambda^2 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ y^{(n)}(t) &= \lambda^n e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\lambda^n \cancel{e^{\lambda t}} + a_1\lambda^{n-1}\cancel{e^{\lambda t}} + \ldots + a_n\cancel{e^{\lambda t}} = 0$$
$$\underbrace{\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n}_{p(\lambda)\text{, Polynom in }\lambda} = 0$$

λ_i sei Nullstelle von $p(x)$: $e^{\lambda_j t}$ ist Lösung.

λ_i sei doppelte Nullstelle von $p(x)$: $y_1(t) = e^{\lambda_j t}$ und $y_2(t) = te^{\lambda_j t}$ sind Lösungen.

λ_i sei dreifache Nullstelle von $p(x)$: $y_1(t) = e^{\lambda_j t}$, $y_2(t) = te^{\lambda_j t}$ und $y_2(t) = t^2e^{\lambda_j t}$ sind Lösungen.

„Rezept" zum Lösen von homogenen Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Gesucht: n linear unabhängige Lösungen von

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

1. Betrachte $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ und bestimme alle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$.
2. Lösungen sind $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \ldots$.
3. Ist λ_j k-fache Nullstelle, so sind auch $te^{\lambda_j t}, t^2 e^{\lambda_j t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda_j t}$ linear unabhängige Lösungen.
4. Reelle Lösungen erhält man durch „wegwerfen" einer Lösung und dem Bestimmen des Real- und Imaginärteils.

Beispiel:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \\ \lambda_{1,2} &= -3 \pm \sqrt{9-9} \\ \lambda_{1,2} &= -3 \end{aligned}$$

D. h. $\lambda = -3$ ist doppelte Nullstelle von p.

$$y_1(t) = e^{-3t} \qquad y_2(t) = te^{-3t}$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$y_h(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 te^{-3t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.4.4 Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = b$$

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (*)$$

b	*Ansatz*
$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n$	$A_0 + A_1 t + \ldots + A_n t^n$
$\alpha e^{\mu t}$	$Ae^{\mu t}$, sofern μ keine Nullstelle von $(*)$. $Ate^{\mu t}$, sofern μ eine Nullstelle 1. Ordnung. $\vdots$ $At^k e^{\mu t}$ sofern μ eine Nullstelle k-ter Ordnung .
$p(t)e^{\mu t}$	$P(t)e^{\mu t}$, sofern μ keine Nullstelle von $(*)$, P hat denselben Grad wie p. $\vdots$ $P(t)t^k e^{\mu t}$, sofern μ Nullstelle k-ter Ordnung, P hat denselben Grad wie p.
$c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$	$A\sin\omega t + B\cos\omega t$, sofern $\omega\imath$ keine Nullstelle von $(*)$. $\vdots$ $At^k \sin\omega t + Bt^k \cos\omega t$, sofern $\omega\imath$ k-te Nullstelle von $(*)$.

Aufgabe

Bestimme die allgemeine Lösung von

$$y'' + 6y' + 9y = 18t + 8e^t$$

und bestimme die Lösung, die das Anfangswertproblem $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ löst. Forme in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung (d. h. von der Gestalt $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$) um.

Lösung:

Homogenes System:

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Lösung über Exponentialansatz:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9y = 0$$
$$\lambda_{1,2} = -3$$
$$y_1(t) = e^{-3t} \qquad y_2(t) = te^{-3t}$$

Ansatz für die Partikulärlösung:

$$y_p(t) = At + B + Ce^t$$
$$y_p'(t) = A + Ce^t$$
$$y_p''(t) = Ce^t$$

$$\begin{aligned} 18t + 8e^t &= y'' + 6y' + 9y = Ce^t + 6A + 6Ce^t + 9At + 9B + 9Ce^t = \\ &= 9At + 6A + 9B + 16Ce^t \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$8 = 16C \ \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$
$$9A = 18 \ \Rightarrow A = 2$$
$$6A + 9B = 0$$
$$12 + 9B = 0$$
$$B = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$$

Partikulärlösung:

$$y_p(t) = 2t - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}e^t$$

Allgemeine Lösung:

$$y(t) = c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t} + 2t - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}e^t$$

Lösung des Anfangswertproblems:

$$y'(t) = -3c_1e^{-3t} + c_2e^{-3t} - 3c_2te^{-3t} + 2 + \frac{1}{2}e^t$$
$$y(0) = 0 \ \Rightarrow \ y(0) = c_1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = c_1 - \frac{5}{6} = 0$$
$$c_1 = \frac{5}{6}$$
$$y'(0) = 1 \ \Rightarrow \ -3c_1 + c_2 + 2 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} + c_2 + \frac{5}{2} = c_2 = 1$$

$$y(t) = \frac{5}{6}e^{-3t} + te^{-3t} + 2t - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}e^t$$

Umschreiben von $y'' + 6y' + 9y = 18t + 8e^t$ in ein System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} x_1 &= y & \dot{x_1} &= \dot{y} = x_2 \\ x_2 &= \dot{y} & \dot{x_2} &= \ddot{y} = -6y' - 9y + 18t + 8e^t = \\ & & &= -6x_2 - 9x_1 + 18t + 8e^t \end{aligned}$$

$$\dot{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -6x_2 - 9x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 18t + 8e^t \end{pmatrix}$$

$$\dot{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 18t + 8e^t \end{pmatrix}$$