Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

1. Übungsserie zur Abgabe am 14.10.2013

Thema: Vollständige Induktion

Ablauf: Die Übung findet wöchentlich montags um 17 Uhr im Curiehörsaal statt. Der erste Teil des Blatts besteht aus Hausaufgaben, die bis zur nächsten Übung bearbeitet und vor der Übung abgegeben werden sollen. Der Zweite Aufgabenteil wird im Tutorium besprochen, das heißt wir erarbeiten gemeinsam eine Lösung. Die Hausaufgaben werden von Dario Dennstädt *(dario.dennstaedt@tu-ilmenau.de)* korrgiert und pro Aufgabe können 5 Punkte erreicht werden. Eine Abgabe in Zweiergruppen ist erwünscht.

Schein: Zum Erhalt des Scheins „Analysis I“ als eine Prüfungsvorleistung für die Prüfung „Analysis I/II“ werden folgende Anforderungen gestellt:

(i) Es müssen mindestens 50% der in der Übung erreichbaren Punkte erreicht werden.

(ii) Es muss mindestens eine Aufgabe in der Übung an der Tafel vorgerechnet werden.

Über den Erhalt des Scheins wird schließlich im Rahmen einer mündlichen Rücksprache am Ende des Semesters entschieden. Weiterhin werden für das Vorrechnen an der Tafel bis zu 2 Zusatzpunkte vergeben.

Hausaufgabe 1
Man beweise die folgenden Aussagen:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes reelle x gilt die Gleichung

$$(x+1)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + x^n.$$

(b) Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

(c) Für die Potenzsummen $S_n^p := 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$ beweise man die von Pascal stammende Identität

$$(p+1)S_n^p + \binom{p+1}{2}S_n^{p-1} + \binom{p+1}{3}S_n^{p-2} + \ldots + S_n^0 = (n+1)^{p+1} - 1.$$

Hinweis: Man kann das p bei Aufgabenteil (c) als Parameter auffassen und eine vollständige Induktion nach n durchführen.

Hausaufgabe 2
Beweisen Sie folgende Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ gilt:

$$\binom{n}{3} < 2^n \leq n!.$$

Begründen Sie insbesondere, wieso die Differenz $2^n - \binom{n}{3}$ beliebig groß werden kann.

(b) Für jede reelle Zahl $x > -1$ mit $x \neq 0$ und jedes natürliche $n \geq 2$ gilt

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Die Aussage (b) bezeichnet man in der Literatur als *„Bernoulli-Ungleichung"*.

Tutoriumsaufgabe 1:
Man beweise, dass es genau $\binom{n+k-1}{k-1}$ Möglichkeiten gibt n identische Objekte auf k Schubfächer zu verteilen.
Wie viele Lösungen $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ besitzt die Gleichung $x_1 + \ldots + x_k = n$?

Hinweis: Man kann eine Induktion nach den zwei Variablen n und p durchführen, dazu muss man die Induktionsschritte $(n, p) \to (n, p + 1)$ und $(n, p) \to (n + 1, p)$ betrachten.

Tutoriumsaufgabe 2:
Unter der Annahme $x \neq y$ weise man nach, dass für jedes natürliche $n > 1$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

gilt. Für n=2 erhält man die bekannte dritte binomische Formel.

Tutoriumsaufgabe 3:
Lesen Sie den folgenden Induktionsbeweis sorgfältig durch:

BEHAUPTUNG: Für jede natürliche Zahl n ist $n(n + 1)$ eine ungerade Zahl.

BEWEIS: Angenommen, dies gilt für $n - 1$ anstatt für n. Wir beweisen es für n indem wir die Induktionsvoraussetzung nutzen. Wir erhalten

$$n(n + 1) = (n - 1)n + 2n.$$

Nach der Induktionsvorausstzung ist hier $(n-1)n$ ungerade und $2n$ ist gerade. Somit ist $n(n+1)$ die Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl, also selbst ungerade.

Andererseits ist $n(n + 1)$ für alle natürlichen n das Produkt einer geraden und einer ungeraden Zahl, also selbst gerade. Was stimmt an dem „Beweis"nicht?