Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
Prof. C. Trunk und H. Gernandt

Wintersemester 2013/14

Analysis I

2. Übungsserie zur Abgabe am 21.10.2013

Thema: Folgerungen aus den Körper- und Anordnungsaxiomen

Hausaufgabe 3
Wählen Sie fünf der in Tutoriumsaufgabe 4 aufgeführten Folgerungen aus den Körperaxiomen aus und beweise Sie diese! Geben Sie dazu in jedem Schritt an, welche der Axiome *(A.1)–(A.4)*, *(D)* und *(M.1)–(M.4)* Sie verwendet haben.

Hinweis: Auch die nicht ausgewählten Folgerungen können zum Beweis der von Ihnen ausgewählten Aussagen verwendet werden.

Hausaufgabe 4
Wählen Sie fünf der in Tutoriumsaufgabe 6 aufgeführten Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen aus und beweise Sie diese! Geben Sie dazu in jedem Schritt an, welche der Axiome Sie verwendet haben.

Tutoriumsaufgabe 4:
Man beweise die nachstehenden Folgerungen aus den Axiomen der Addition *(A.1)–(A.4)*, dem Distributivgesetz *(D)* und den Axiomen der Multiplikation *(M.1)–(M.4)*.

(A) Das neutrale Element der Addition ist eindeutig bestimmt.

(B) Das zu $x \in \mathbb{R}$ inverse Element $-x$ ist eindeutig bestimmt.

(C) Es gilt $-0 = 0$, das heißt das Element 0 ist sein eigenes Inverses.

(D) Für $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung, namlich $x = b - a$.

(E) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $-(-x) = x$.

(F) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $-(x + y) = -x - y$.

(G) Das neutrale Element der Multiplikation ist eindeutig.

(H) Das zu $x \in \mathbb{R}$ inverse Element x^{-1} (bzgl. Multiplikation) ist eindeutig.

(I) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $a \cdot x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung, nämlich $x = a^{-1} \cdot b$.

(J) Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(K) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.

(L) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau dann $x \cdot y = 0$, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.

(M) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $-x = (-1) \cdot x$.

(N) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(O) Für alle reellen Zahlen $x \neq 0$ gilt $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$.

(P) Für alle reellen Zahlen $x, y \neq 0$ gilt $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.

(Q) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

.

(R) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $x_i, y_j \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Dann gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j.$$

Tutoriumsaufgabe 5:
Für $x \in \mathbb{R}$ und natürliche Zahlen n und m folgere man mit der Definition der Potenzen die folgenden Beziehungen

(a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$,

(b) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$,

(c) $x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$.

Tutoriumsaufgabe 6:
Für $x, y, z, a \in \mathbb{R}$ zeige man die nachstehenden Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen *(O.1)–(O.3)*, unter der Zuhilfenahme von Tutoriumsaufgabe 2 und den Körperaxiomen.

(S) Ist $x < y$ und $y < z$, so folgt $x < z$. *(Transitivität)*

(T) Die Ungleichung $x < y$, ist äquivalent zu der Ungleichung $x + a < y + a$. *(Translationsinvarianz)*

(U) Ist $x < y$, so folgt $-x > -y$.

(V) Ist $x < y$ und $a < b$, so folgt $x + a < y + b$.

(W) Ist $x < y$ und $a > 0$, so gilt $a \cdot x < a \cdot y$.

(X) Ist $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$, so gilt $a \cdot x < b \cdot y$.

(Y) Ist $x < y$ und $a < 0$, so gilt $a \cdot x > a \cdot y$.

(Z) Für $x \neq 0$ gilt $x^2 > 0$. Daher gilt insbesondere $1 = 1^2 > 0$.

(α) Es gilt genau dann $x > 0$, wenn $x^{-1} > 0$.

(β) Ist $0 < x < y$, so folgt $x^{-1} > y^{-1}$.

Tutoriumsaufgabe 7:
Wir definieren die erweiterten natürlichen Zahlen $\widehat{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit dem Symbol $\infty \notin \mathbb{N}$. Auf $\widehat{\mathbb{N}}$ führen wir die zwei Verknüpfungen

$$+ : \widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}} \to \widehat{\mathbb{N}},\ (n,m) \mapsto n+m \quad \text{und} \quad \cdot : \widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}} \to \widehat{\mathbb{N}},\ (n,m) \mapsto n \cdot m$$

wie folgt ein:

(a) Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei $n + m$ bzw. $n \cdot m$ die übliche Addition bzw. Multiplikation natürlicher Zahlen.

(b) Für $n \in \widehat{\mathbb{N}}$ sei $n + \infty = \infty + a = \infty$.

(c) Für $n \in \widehat{\mathbb{N}} \setminus \{0\}$ sei $n \cdot \infty = \infty \cdot n = \infty$.

(d) $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.

Zeigen Sie, dass $\widehat{\mathbb{N}}$ mit diesen Verknüpfungen die Körperaxiome *(A.1), (A.2), (A.3), (M.1), (M.2), (M.3)* und *(D)* erfüllt, aber nicht *(A.4)* und *(M.4)*.