Themenüberblick 2 Fachsemester:
- Stetigkeit
- Diffbarkeit
- Int.-barkeit
- Max/Min
- Differentialgleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\text{Stetigkeit}\\ \text{Diffbarkeit}\\ \text{Int.-barkeit}\\ \text{Max/Min}\end{array}\right\} \vec{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

Wdh. $\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_j \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{C}^n \ni \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}, Z_j \in \mathbb{C}$$

$$\left(\begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}\right)_{\mathbb{C}^n} := Z_1 \overline{W_1} + \cdots + Z_n \overline{W_n}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}^n} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

$$\left|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)_{\mathbb{R}^n}} = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \quad \text{Länge eines Vektors}$$

$$\left|\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right| = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2} \quad \text{Abstand von} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ zu } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

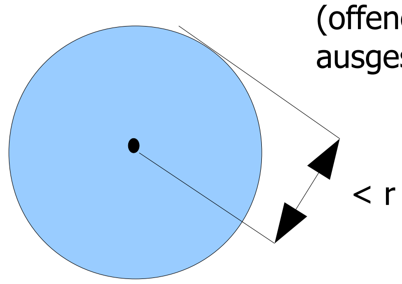
Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt, $r > 0$

$$k_r(\vec{a}) \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \middle| \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right| < r \right\}$$

Menge aller Objekte deren Abstand
zu $\vec{a}$ kleiner als r ist !
Das ist eine Kugel um $\vec{a}$ mit dem Radius r

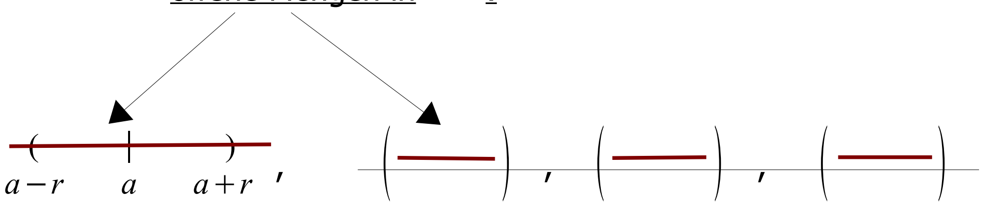
Kugel mit Radius r um $\vec{a}$

(offene Kugel, Rand ausgeschlossen.)



$k_r(\vec{0})$

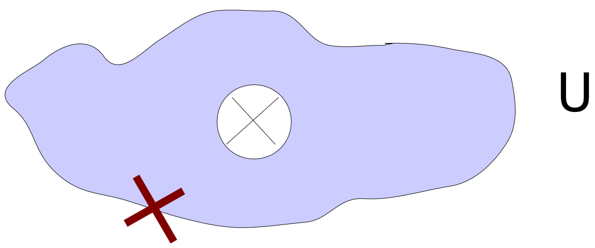
offene Mengen in $\mathbb{R}$:



$kr(\vec{a}) = \{x \in \mathbb{R} \mid |a-x| < r\}$ $\qquad n=1$

Offenheitskriterium

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, wenn es um jeden ihrer Punkte eine Kugel gibt, die ganz in U liegt.



Abgeschlossenheitskriterium

A ist abgeschlossen wenn $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

Oder: A ist abgeschlossen, wenn alle Randpunkte von A zu A gehören.

Randpunkt $\vec{a}$ ist Randpunkt von $A \Leftrightarrow$ In jeder Kugel um $\vec{a}$ liegen Punkte aus A und Punkte aus $\mathbb{R}^n \setminus A$.

Def.1 Konvergenz $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{R}^n$

$| \quad |$ Abstand (Betrag)

$(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ heißt Konvergent gegen $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

falls $\lim_{k\to\infty} \underbrace{|\vec{x}_k-\vec{a}|}_{\in\mathbb{R}}=0$

Notation: $\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k=\vec{a}$

zusätzlicher Index!

$$\vec{x}_k=\begin{pmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,\ k\in\mathbb{N},\ a=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$|\vec{x}_k-\vec{a}|=\sqrt{|x_1^k-a_1|^2+|x_2^k-a_2|^2+\cdots+|x_n^k-a_n|^2}\to 0$$

Also: $\lim \vec{x}_k=\vec{a} \Leftrightarrow \lim x_1^k=a_1,\ \lim x_2^k=a_2,\ \ldots \lim x_n^k=a_n$

Satz 2

Eine Folge von Vektoren $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Konvergiert genau dann, wenn alle Komponentenfolgen Konvergieren.

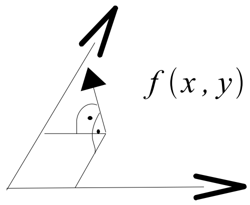
$$\lim \vec{x}_k=\vec{a} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lim \vec{x}_1^k=\vec{a}_1, \\ \lim \vec{x}_2^k=\vec{a}_2, \\ \vdots \\ \lim \vec{x}_n^k=\vec{a}_n \end{matrix}$$

Funktionen

$\vec{f}: D \to \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$ Bsp.: $\underbrace{(x, y, z)}_{\in\mathbb{R}^3} \to \underbrace{\begin{pmatrix} x, y^{2,} z \\ x+y \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^3}$

$\underbrace{(x_1 \cdots x_n)}_{\mathbb{R}^n} \to \vec{f}(x_{1,} \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1 \cdots x_n) \\ f_2(x_1 \cdots x_n) \\ f_m(x_1 \cdots x_n) \end{pmatrix}$ $f_1: D \to \mathbb{R}$, $f_{2,} f_{3,} \cdots f_m: D \to \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = 4\pi \left(\frac{M}{2\text{xR}} \pi\right)^{3/2} y^2 e^{\frac{-My^2}{2\text{Rx}}}$



$f(x, y)$

$f(x, y)$: `Höhe über dem Pkt.` (x, y)

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Def.3: Grenzwerte von Funktionen

$D \subset \mathbb{R}^n, \vec{f}: D \to \mathbb{R}^m, \vec{b} \in \mathbb{R}^m, a \in \mathbb{R}^n$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

$\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$ $\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(\vec{x}_k)$ die gegen $\vec{a}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert gilt
$\lim\limits_{k \to \infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{b}$ und es ex. mindestens eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $D \backslash \{\vec{a}\}$, die gegen $\vec{a}$ konvergiert.

Def.4: Stetigkeit $D \subset \mathbb{R}^n, \vec{f}: D \to \mathbb{R}^m, a \in D$

f heißt stetig in $\vec{a}$, falls $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a})$
f heißt stetig in D, falls *f* stetig in jedem Punkt $\vec{a} \subset D$ ist.

Beispiel: $f: D \to \mathbb{R}$ $D: R^2 \backslash \{0\}$ $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ Grenzwert in $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ existiert, denn sei $\left(\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}\right)_{(K \in \mathbb{N})}$ beliebige Folge in $D: R^2 \setminus \{0\}$ mit

$\left(\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}\right) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = \vec{0} \Rightarrow x_k \rightarrow 0, y_k \rightarrow 0$

Es gilt $\left|f(x, y)\right| = \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leqslant \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2}}\right| = \frac{|x|^2}{|x|} = |x|$

=> $\left|f(x_k, y_k) - 0\right| \leqslant \left|x_k\right| \rightarrow 0$

=> $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(\vec{x}) = 0$ (siehe Def. 3) und f ist stetig in (0,0).
