Vorlesung 10 Mathe II

Seite 1

MB-Matr-2011 Konstantin Mahler **Vorlesungsdatum: 04.05.2012**

Satz 21

$f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^n$ offen, f zweimal stetig differenzierbar, die Verbindung von $\overrightarrow{x_0}$ und $\overrightarrow{x_0} + \vec{\mathrm{h}}$ liege in G.

Dann gilt mit $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

$$f(\overrightarrow{x_0} + \vec{\mathrm{h}}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\overrightarrow{x_0}) h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{x_0}) h_i h_j + \overrightarrow{FEHLER}$$

$$= \boldsymbol{f(\overrightarrow{x_0}) + grad_f(\overrightarrow{x_0})^T \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T hess_f(\overrightarrow{x_0}) \vec{h} + \overrightarrow{FEHLER}}$$

$f(\overrightarrow{x_0}) + grad_f(\overrightarrow{x_0})^T \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T hess_f(\overrightarrow{x_0}) \vec{h}$ heißt **Taylerpolynom 2. Grades**

- Wobei

$$\lim_{|\vec{h}| \to 0} \frac{\overrightarrow{FEHLER}}{|\vec{h}|^2} = 0$$

$$grad_f(\overrightarrow{x_0})^T \vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{x_0}) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overrightarrow{x_0}) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{x_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$= \left(grad_f(\overrightarrow{x_0}), \vec{h} \right)_{\mathbb{R}^n}$$

$$\vec{h}^T hess_f(\overrightarrow{x_0}) \vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\overrightarrow{x_0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\overrightarrow{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\overrightarrow{x_0}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overrightarrow{x_0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\overrightarrow{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\overrightarrow{x_0}) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\overrightarrow{x_0}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\overrightarrow{x_0}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\overrightarrow{x_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{(grad_f(\overrightarrow{x_0}), \vec{h})_{\mathbb{R}^n}}$$

Vergleich mit totaler Differenzierbarkeit

$f(\overrightarrow{x_0} + \vec{\mathrm{h}}) = f(\overrightarrow{x_0}) + f'(\overrightarrow{x_0}) \vec{h} + \overrightarrow{REST} = f(\overrightarrow{x_0}) + grad_f(\overrightarrow{x_0})^T \vec{h} + \overrightarrow{REST}$

Und

$$\lim_{|\vec{h}|\to 0} \frac{\overrightarrow{REST}}{|\vec{h}|} = 0$$

Vergleich mit Mathematik 1

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + R_2(x)$

$x \mathrel{\widehat{=}} \vec{x_0} + \vec{h} \qquad x - x_0 \mathrel{\widehat{=}} \vec{h} \qquad x_0 \mathrel{\widehat{=}} \vec{x_0}$

Bsp.: Bestimmen sie das Taylerpolynom 2. Grades der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ mit Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0) = \vec{x_0}$

Lösung:

$$f(\vec{x_0}) = f(0,0) = 0$$

$$grad_f(\vec{x}) = grad_f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y) \\ \sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

$$grad_f(0,0)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$hess_f(\vec{x}) = hess_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y) \\ \cos(x)\cos(y) & -\sin(x)\sin(y) \end{pmatrix},$$

$$hess_f(\vec{x_0}) = hess_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Taylorpolynom 2. Grades: $f(\vec{x_0}) + grad_f(\vec{x_0})^T \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T hess_f(\vec{x_0}) \vec{h}$

$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad = 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 h_2$

Extremwerte

Im Folgenden sei immer:

$f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^n$ offen, f zweimal stetig differenzierbar.

Merke: $grad_f(\vec{x_0})$ schaut in die Richtung des stärksten Wachstums. Ist $\boldsymbol{grad_f(\vec{x_0}) = 0}$ dann gibt es **kein Wachstum in $\vec{x_0}$, $\vec{x_0}$ ist Kandidat für eine Extremstelle.**

Satz 22

f, G wie oben, f habe in $\overrightarrow{x_0} \in G$ ein lokales Maximum oder Minimum.

Dann gilt:

$$\boldsymbol{grad_f(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}}$$

Also: $grad_f(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$ ist notwendig, aber nicht hinreichend.

Oder: $\overrightarrow{x_0}$ mit $grad_f(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$ ist Kandidat für ein lokales Maximum und Minimum.

Definition: $\overrightarrow{x_0} \in G$ heißt lokales Maximum (bzw. Minimum), falls eine offenen Menge $U \in G$ mit $\overrightarrow{x_0} \in U$ existiert, so dass $f(\overrightarrow{x_0}) \geq f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in U$ (bzw. $f(\overrightarrow{x_0}) \leq f(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in U$).

Gilt $f(\overrightarrow{x_0}) > (\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in U, \vec{x} \neq \overrightarrow{x_0}$ (bzw. $f(\overrightarrow{x_0}) < (\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in U, \vec{x} \neq \overrightarrow{x_0}$)

dann heißt $\boldsymbol{\overrightarrow{x_0}}$ **striktes Maximum (bzw. Minimum) von $\boldsymbol{f}$.**

Taylor: $f(\overrightarrow{x_0} + \vec{h}) = f(\overrightarrow{x_0}) + grad_f(\overrightarrow{x_0})^T \vec{h} + \frac{1}{2} \vec{h}^T hess_f(\overrightarrow{x_0}) \vec{h}$

Sei $\overrightarrow{x_0}$ Kandidat für ein Maximum oder Minimum: $grad_f(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$

$$f(\overrightarrow{x_0} + \vec{h}) = f(\overrightarrow{x_0}) + \frac{1}{2}(hess_f(\overrightarrow{x_0})\vec{h}, \vec{h})_{\mathbb{R}^n}$$

$$f(\overrightarrow{x_0} + \vec{h}) - f(\overrightarrow{x_0}) = \frac{1}{2}(hess_f(\overrightarrow{x_0})\vec{h}, \vec{h})_{\mathbb{R}^n}$$

also $f(\overrightarrow{x_0} + \vec{h}) > f(\overrightarrow{x_0})$ falls $(hess_f(\overrightarrow{x_0})\vec{h}, \vec{h})_{\mathbb{R}^n} > 0$ für alle $\vec{h} \in \mathbb{R}^n, \vec{h} \neq \vec{0}$

Satz 23

$\overrightarrow{x_0}$ sei Kandidat, d.h. $grad_f(\overrightarrow{x_0}) = \vec{0}$.

Gilt $\left(hess_f(\overrightarrow{x_0})\vec{h}, \vec{h}\right)_{\mathbb{R}^n} > 0$ für alle $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

Dann hat $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{\overrightarrow{x_0}}$ ein striktes Minimum und $\boldsymbol{hess_f(\overrightarrow{x_0})}$ heißt positiv definit.