2.) Vorlesung Mathe II

Bem. $|(\vec{x})| = \left|\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right| = \sqrt{(|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)} = \|\vec{x}\|$

(siehe Def. 3)

$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{f}(x) = \vec{b} :\Leftrightarrow$ Für jede Folge $(\vec{x}_k)$ in D, die gegen $\vec{a}$ konvergiert gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{f}(\vec{x}_k) = \vec{b}$ und es existiert mindestens eine Folge $(\vec{x}_k)$ in $D\setminus\{\vec{a}\}$ die gegen $\vec{a}$ konvergiert.

Bsp.: $D = \mathbb{R}^2 \setminus 0,\ f: D \to \mathbb{R}$ $\qquad |f(x,y)| \leqslant |x|$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}} \qquad \lim_{\vec{x}\to\vec{0}} f(\vec{x}) = \vec{0} \qquad 0 = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp.: $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{(x^4+y^2)}}$ $\qquad D = \mathbb{R}^2 \setminus 0$

$f: D \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|f(x,y)| \leqslant 1$ wähle $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{k}) \\ 0 \end{pmatrix} \in D$

$f(x,0) = 1,\ x \neq 0$ $\qquad \lim\limits_{(k\to\infty)} f\left(\frac{1}{k}, 0\right) = 1$

wähle $\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\frac{1}{k}) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(0,y) = 0,\ y \neq 0$ $\qquad \lim\limits_{(k\to\infty)} f\left(0, \frac{1}{k}\right) = 0$

Also: $\lim\limits_{(\vec{x}\to\vec{0})} f(\vec{x})$ existiert nicht und f ist nicht stetig in $(0,0)$.

Bsp.: $f(x,y)=\frac{x^2}{(x^3+y^2)}$ $\qquad D=\left\{\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\in \mathbb{R}^2 | x^3+y^2>0\right\}$

$((-1,1)\notin D)$

Bsp.: $f: D\rightarrow \mathbb{R}, D:=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in \mathbb{R}^2 \setminus x-1,+y^2\neq 0\right\}$ beachte $\longrightarrow$ $\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, \text{für } x>0\\-1, \text{für } x<0\end{cases}$

$f(x,y)=\frac{|x-1|}{(x-1+y^2)}$ wähle $\begin{pmatrix}x_k\\y_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\frac{1}{k}\\0\end{pmatrix}\overset{k\rightarrow\infty}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}z_k\\w_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{k}\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Existiert $\lim\limits_{x\rightarrow\binom{0}{1}} \vec{f}(x)=?$ Vermutung: <u>**Nein**</u>

$$f(x_k,y_k)=\frac{|1+\frac{1}{k}-1|}{1+\frac{1}{k}-1+0^2}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}=1$$

$$f(z_k,w_k)=\frac{|1-\frac{1}{k}-1|}{1-\frac{1}{k}-1+0^2}=\frac{\frac{1}{k}}{-\frac{1}{k}}=-1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{k\rightarrow\infty} f(x_k,y_k)=1\neq\lim\limits_{k\rightarrow\infty} f(z_k,w_k)=-1$ also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\vec{x}\rightarrow\binom{1}{0}} f(\vec{x})$ nicht!

Satz 5 $\vec{f}, \vec{g}: D \to \mathbb{R}^m, D \in \mathbb{R}^n, h: D \to \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \vec{z}: E \to D, E \subset \mathbb{R}^l$

Bsp.: $f: R^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

Frage: Für welche $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ist f stetig?

sind $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}, \vec{z}$ stetige Funktionen, so sind auch die folgenden Funktionen

stetig: I) $\alpha \vec{f} + \vec{g}$

II) $h\vec{f}$ und $\frac{\vec{f}}{h}$ sofern ($h(\vec{x}) \neq 0$ für alle $\vec{x} \in D$)

III) $\vec{f}(\vec{z})$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst } 0 \end{cases}$$

<u>1. Fall</u> $(x,y) \neq (0,0)$

Dann ist f Verknüpfung stetiger Funktionen: $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f_1(x,y) = x$ ist stetig,

denn sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ beliebig und $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \to \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x_k \to a_1, y_k \to a2$

$\Rightarrow f_1(x_k, y_k) = x_k \to a_1 = f_1(a_{1,} a_2) = f_1(\vec{a})$

, also ist f_1 in $\vec{a}$ stetig, $\vec{a}$ war beliebig, also ist

f_1 auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

Genauso:

$f_2(x,y) = y \quad f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$	ist ebenso stetig
$H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\, h(x) = x^2$	ist stetig (Mathe 1)
$g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x}$	"-" "-"
$f_3(x,y) = x^2 \quad f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	
$= f_1(x,y) * f_1(x,y)$	ist stetig wegen Satz 5 II
$f_4(x,y) = y^2 = f_2(x,y) * f_2(x,y)$	"-" "-"
$f_5(x,y) = xy = f_1(x,y) f_2(x,y)$	"-" "-"

$\Rightarrow f(x,y) = \ldots \Rightarrow f$ ist Verknüpfung stetiger Funktionen und somit stetig.

2 Fall $(x, y) = (0,0)$:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \text{ also } \lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} w_k \\ z_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \lim_{k\to\infty} f(w_k, z_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2}{k^2}}{\frac{4}{k^2} + \frac{2}{k^2}} = \frac{2}{5}$$

Also existiert der Grenzwert in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht! Und f ist nicht stetig in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Satz 6

$f_1(x_1 \cdots x_n) =$ Polynom in $x_1 +$ Polynom in $x_2 + \cdots +$ Polynom in x_n ist stetige Funktion, $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Bsp.: $f(x, y) = 7 + 2x + 3x^2 + 2y + 7y^3$, ist stetig in $\mathbb{R}^2$, das folgt aus Satz5