Thema der Vorlesung:

Gradient

Wiederholung Def. 12 (Richtungsableitung).

Satz 14: DER Satz über die Richtungsableitung

$F: G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$ *offen*, $\vec{f}$ differenzierbar in $\vec{x}, \vec{x} \in G$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$.

Dann gilt $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{x}) = \vec{f}\,'(\vec{x})\vec{v}$

Gradient = ∇ (sprich: Nabla) = Ableitung

Der Fall m=1

Es sei $f: G \to \mathbb{R}, G \subset \mathbb{R}^n$ *offen*, f in $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar, also $f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + f\,'(\vec{x})\vec{h} + \overrightarrow{\text{REST}}$ für „kleine" $\vec{h}$.

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$f\,'(\vec{x})$: Zeilenanzahl = m = 1
: Spaltenanzahl=n

$$f\,'(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

Bem.: auch Jakobimatrix genannt oder einfach nur Ableitung.

$$f(\vec{x}+\vec{h}) - f(\vec{x}) = f\,'(\vec{x})\vec{h} + \overrightarrow{\text{REST}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \overrightarrow{\text{REST}} =$$

Bem.: Skalar-Produkt im R^n.

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) h_n = \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\text{REST}} = \left(f\,'(\vec{x})^T, \vec{h} \right)_{\mathbb{R}^n} + \overrightarrow{\text{REST}}$$

Gradient: $$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} = f\,'(\vec{x})^T = \mathbf{grad}_f(\vec{x})$$

Also: $f(\vec{x}+\vec{h})-f(\vec{x})=(f'(\vec{x})^T,\vec{h})+\overrightarrow{\text{REST}}=\left(\text{grad}_f(\vec{x}),\vec{h}\right)+\overrightarrow{\text{REST}}$

Bem.: - $\text{grad}_f{}'(\vec{x}),\vec{h}$ ist am größten, wenn $\vec{h}\,\&\,f(\vec{x})$ parallel sind!
- wenn h senkrecht auf dem Gradienten steht ändert sich nichts, das heisst $(\text{grad}_f(\vec{x}),\vec{h})=0$

Änderung von f (in Richtung $\vec{h}$) $\approx(\text{grad}_f(\vec{x}),\vec{h})=\|\text{grad}_f(\vec{x})\|\;\|\vec{h}\|\cos(\sphericalangle\,\text{grad}_f(\vec{x}),\vec{h})$ Bem.: Def. Aus Mathe 1

1) Änderung am größten, wenn $\cos\sphericalangle\ldots=1$, also ist $\sphericalangle(\text{grad}_f(\vec{x})\vec{h})=0$.
– das ist der Fall wenn $\text{grad}_f(\vec{x})$ parallel zu $\vec{h}$ ist und beide in dieselbe Richtung zeigen.

$\Rightarrow \text{grad}_f(\vec{x})$ **schaut in die Richtung des Stärksten Anstieges!**

2) Änderung ist 0, wenn $\cos\sphericalangle\ldots=0$, also $\sphericalangle=90°$, d.h. $\vec{h}$ steht senkrecht auf $\text{grad}_f(\vec{x})$.

$\Rightarrow \text{grad}_f(\vec{x})$ **steht senkrecht auf dem Niveau von f !**

Aufgabe: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=(x+1)^2+(y+1)^2$

a) Skizziere die Niveaulinien $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid f(x,y)=c\right\}=\text{Nc für c=0, c=2 und c=4}$.

Bem.: Vgl. mit Höhenlinien im Gebirge.

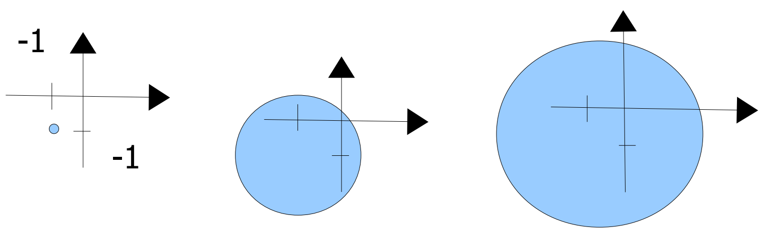
b) Ist f differenzierbar?
c) Bestimme $\text{grad}_f(\vec{x})$.

LSG:

a) $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mid f(x,y)=c\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mid (x+1)^2+(y+1)^2=(\sqrt{c})^2\right\}$

Nc ist ein Kreis im $\mathbb{R}^2$ um (-1, 1) mit dem Radius $\sqrt{c}$

c = 0 c = 2 c = 4



b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2\mathrm{x}+2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(y+1)$ sind stetig, also ist f total differenzierbar nach Satz 13.

c) $$\mathrm{grad}_f(\vec{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(x+1)\\ 2(y+1)\end{pmatrix}$$

Aufgabe:

a) In welcher Richtung ist für die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=(x+1)\sin x+\sin y$ im Punkt (0,0) der Anstieg gleich Null?

b) Wie groß ist der größte Anstieg?

LSG:

a) $$\mathrm{grad}_f(\vec{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin x+(x+1)\cos x\\ \cos y\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0{,}0)= \quad f'\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\vec{v}\ \text{falls}\ \|\vec{v}\|=1$$

$$0 \quad = \quad \mathrm{grad}_f(\vec{x})^T\vec{v}=(\sin 0+(0+1)\cos 0,\cos 0)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}$$

$$0 \quad = \quad (1,1)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix}=v_1+v_2\ \text{und}\ \|\vec{v}\|=1=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$

$$v_1=-v_2$$

$$v_1^2+v_2^2=1\Rightarrow 2\mathrm{v}_1^2=1\Rightarrow v_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad v_2=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

in Richtung $\vec{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ ist der Anstieg von f gleich Null!

b) Richtung des größten Anstiegs: $\vec{v}=grad_f(0,0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

Größter Anstieg: Richtungsableitung in (0, 0) in Richtung $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\quad (\text{also } \|\vec{v}_1\|=1)$$

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}_1}(0,0)=f'(0,0)\vec{v}_1$ (siehe Satz 14): $(11)^T\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Bem.: Gradient = Richtung des größten Anstieges !