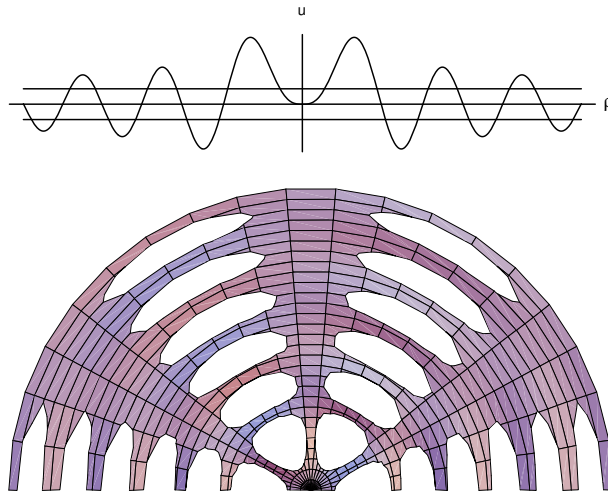


Differentialgleichungen
für Ingenieure



Information. Für die erfolgreiche Teilnahme an diesem Modul erhalten Sie

6 Leistungspunkte nach ECTS.

Entsprechend erwarten wir von durchschnittlich begabten und vorgebildeten Studierenden folgenden Arbeitsaufwand:

Vorlesung	2h/Woche
Übung	2h/Woche
Häusliche Nacharbeit und Hausaufgaben	6h/Woche
Klausurvorbereitung	30h

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Differentialgleichungen in den Anwendungen	1
1.2	Erster Blick auf die Mathematik von Differentialgleichungen	2
1.3	Lösungen von Differentialgleichungen	7
2	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	8
3	Gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme	11
3.1	Struktur des Lösungsraumes	12
3.2	Der Exponentialansatz (die Eigenwertmethode)	16
4	Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung	22
4.1	Struktur des Lösungsraumes	23
4.2	Der Exponentialansatz	26
5	Nichtlineare Gleichungen und Erhaltungsgrößen	28
6	Stabilität	32
7	Laplace-Transformation	36
7.1	Definition und grundlegende Eigenschaften	36
7.2	Anwendungen der Laplace-Transformation	41
8	Partielle Differentialgleichungen	47
8.1	Separation und Superposition, Anfangswertprobleme	48
8.2	Rand-Anfangswert-Probleme	53
8.3	Methode der Laplace-Transformation	54
8.4	Ebene-Wellen-Lösungen der Wellengleichung	56
8.5	Separation in Zylinder- und Kugelkoordinaten	57
9	Die Besselsche Differentialgleichung	63
10	Gewöhnliche Rand- und Eigenwertprobleme	67
10.1	Zur Vorbereitung	67
10.1.1	Anfangswertprobleme gegen Randwertprobleme	67
10.1.2	Der Nutzen von Orthonormalsystemen	71
10.2	Selbstadjungiertheit und Orthogonalitätsrelationen	73
10.2.1	Das Sturmische Randwertproblem	73
10.2.2	Orthogonalität der Eigenfunktionen (STURM-LIOUVILLE)	75
10.3	Eigenwerte und die Entwicklung nach Eigenfunktionen	77

10.3.1 Die Folge der Eigenwerte	77
10.3.2 Entwicklung nach Eigenfunktionen	79
11 Anhang	82
11.1 Wiederholung: Eigenwerte und Eigenvektoren	82
11.2 Die Matrix-Exponential-Lösung	85
11.3 Erhaltungsgrößen: Die Keplerschen Gesetze	87
11.4 Die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung	90
11.5 Ein nicht-lineares Randwertproblem: Der Eulersche Knickstab	91
11.6 Der Verlauf der Zylinderfunktionen	98
11.7 Die allgemeine Lösung der Besselgleichung	100
11.8 Die erzeugende Funktion der ganzzahligen Besselfunktionen	102
11.9 Die Legendresche Differentialgleichung	104
11.9.1 Konstruktion von Lösungen für $k > 0$ durch Rekursion.	105
11.9.2 Die Legendrepolynome oder Legendrefunktionen 1. Art	106
11.9.3 Funktionsverlauf der Legendrefunktionen	107
11.9.4 Entwicklung nach Legendrepolynome	108
11.10 Die Γ -Funktion	108

Literatur

Als Lehrbücher zu dieser Veranstaltung werden empfohlen:

- **G. Bärwolff, G. Seifert: Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag**
- **Meyberg, Vachenaue: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag**
- **Boyce, DiPrima: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Spektrum Akademischer Verlag** (Sehr ausführliche Erklärungen!)

Farbig unterlegt finden Sie Beispiel aus den Ingenieur Anwendungen, oft mit expliziten Hinweisen auf Ingenieurskripten des Grundstudiums:

Werkstoffe I

Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik I,
Skript TUB, Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik

Werkstoffe II

Werkstoffe und Bauelemente der Elektrotechnik II,
Skript TUB, Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik

Regelungstechnik I

King: Regelungstechnik I,
Skript TUB

Müller: Mechanik II

W.H. Müller: Mechanik II,
Skript TUB SS 2002

Energie-, Impuls- und Stofftransport

Lehrbuch *Baehr/Stephan: Wärme- und Stoffübertragung*
zur VL Auracher: Energie-, Impuls- und Stofftransport

Verfahrenstechnik I

Kraume: Verfahrenstechnik I,
Skript TUB

Regelung in der Luft- und Raumfahrt

K. Wilhelm: Regelung in der Luft und Raumfahrt,
Skriptum TUB, SS 2002

Zu einzelnen Veranstaltungen existieren mehrere, vielleicht auch neuere Skripten und Lehrbücher. Wir begnügen uns meistens mit *einem* Zitat, auch wenn sich der betreffende Sachverhalt in der Regel an mehreren Stellen findet.

1 Einführung

1.1 Differentialgleichungen in den Anwendungen

- Wo in den Anwendungen kommen welche Differentialgleichungen vor?

Ein kräftefreier Massenpunkt bewegt sich nach NEWTON mit konstanter Geschwindigkeit \vec{v} . Wirkt auf ihn eine Kraft \vec{F} , so bewirkt diese eine zeitliche Änderung der Geschwindigkeit (=Beschleunigung) proportional zur Kraft. Die Geschwindigkeit \vec{v} wird jetzt eine Funktion $\vec{v} = \vec{v}(t)$, und es gilt

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}. \quad (1)$$

Dieser so einfach erscheinende Sachverhalt ist fundamental für unsere Methode, Naturvorgänge und damit technische Vorgänge zu modellieren: Die momentanen (infinitesimalen) Änderungen eines Systems werden „ergründet“ und beschrieben, um aus ihnen die „makroskopische“ Entwicklung des Systems zu bestimmen. Durch (triviale) Integration von (1) findet man die Entwicklung der Geschwindigkeit

$$m\vec{v}(t) = t\vec{F} + m\vec{v}_0.$$

Wenn allerdings \vec{F} nicht konstant ist, sondern selbst von t oder, wie bei Reibungsphänomenen, auch von \vec{v} abhängt, bekommt man eine kompliziertere Beziehung

$$m\dot{\vec{v}}(t) = \vec{F}(t, \vec{v}).$$

Dann wird die Integration schwieriger, oder $\vec{v}(t)$ läßt sich gar nicht mehr durch Integration finden. Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

Aufgrund der gerade erklärten fundamentalen erkenntnistheoretischen Methode ist es offenbar, dass Differentialgleichungen in den Ingenieurwissenschaften eine prominente Rolle spielen.

Die NEWTONSche Gleichung ist in allen Bereichen der **Dynamik** von fundamentaler Bedeutung, wie Sie in den Vorlesungen zur Mechanik feststellen werden [*MueII, Abschnitt 13*].

Vor allem gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme sind das Kernstück der **Regelungstechnik**, vergleichen Sie [*Regelungstechnik I*] oder [*Regelung in der Luft- und Raumfahrt*].

Andere Gebiete werden von *partiellen* Differentialgleichungen bestimmt, also Differentialgleichungen für Funktionen von mehreren Variablen, deren partielle Ableitungen gewisse Gleichungen erfüllen.

Die Mathematik der **Strömungslehre** ist vor allem die Theorie der NAVIER-STOKES-Gleichung.

Die **Schwingungsmechanik** beschäftigt sich mit der Wellen- oder Schwingungsgleichung.

Die **Verfahrenstechnik** und **Energietechnik** modellieren den Stoff- oder Wärmetransport mit Hilfe der Transport-, Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung in immer neuen Varianten. Vergleichen Sie [*Verfahrenstechnik I*] oder [*Energie-, Impuls- und Stofftransport*].

Etwas zugespitzt formuliert:

Sie haben in den ersten Semestern die Differentialrechnung nur deshalb lernen müssen, weil Differentialgleichungen für Ingenieure so ungeheuer wichtig sind.

1.2 Erster Blick auf die Mathematik von Differentialgleichungen

- Wir klären die einfachste Terminologie ...
- ... und wir lösen die einfachsten Differentialgleichungen.
- Wir präzisieren, was wir unter Lösungen verstehen wollen ...
- ... und formulieren einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Zur Terminologie:

- *Differentialgleichungen* sind Gleichungen für eine gesuchte Funktion, welche Ableitungen dieser Funktion involvieren.
- Wenn die Funktion vektorwertig ist, wenn also mehrere Komponentenfunktionen gesucht werden, spricht man von einem *System* von Differentialgleichungen, sonst auch von *skalaren* Differentialgleichungen.
- Wenn die Funktion von mehreren Variablen abhängt und partielle Ableitungen auftreten, spricht man von *partiellen*, andernfalls von *gewöhnlichen* Differentialgleichungen.
- Die höchste auftretende Ableitungsordnung der gesuchten Funktion heißt die *Ordnung* der Differentialgleichung.

LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG.

Wir beginnen mit einigen Bemerkungen zu Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Beispiel 1. Das einfachste Beispiel ist

$$y' = f(x)$$

mit einer Funktion $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Lösungen sind die Stammfunktionen von f , die man (bei stetigem f) durch Integrieren finden kann:

$$y(x) = y_0 + \int_{\alpha}^x f(u) du.$$

Dabei ist y_0 eine beliebige Konstante. Sie wird eindeutig bestimmt, wenn man außer der Differentialgleichung noch eine *Anfangsbedingung*

$$y(\alpha) = y_0$$

vorgibt. □

Beispiel 2. Das nächste Beispiel ist anders geartet, hier kommt die gesuchte Funktion auch auf der rechten Seite vor:

$$y' = ay, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Das ist leicht zu lösen, $y(x) := e^{ax}$ ist offenbar eine Lösung. Aber es ist nicht die einzige: $y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$ ist auch eine, die überdies die Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

erfüllt. Sind das nun alle Lösungen? In dem Modul *Analysis für Ingenieure* wurde gezeigt, dass das wirklich alle Lösungen sind. □

Beispiel 3. Wie lösen Sie

$$y' = a(x)y \tag{2}$$

mit einer auf $[\alpha, \beta]$ stetigen Funktion a ? Können Sie eine Lösung finden, für die $y(\alpha) = y_0$ mit vorgegebenem y_0 ist? \square

Beispiel 4. Wenn Sie das letzte Beispiel geschafft und eine Lösung gefunden haben, die wir mal $y_H(x)$ nennen wollen, was machen Sie dann mit

$$y' = a(x)y + b(x),$$

wobei $a, b : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind?

Dies ist die allgemeine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*. „Linear“ deshalb, weil die gesuchte Funktion y nur linear darin vorkommt.

Wenn Sie an die Produktregel der Differentiation denken, ist es nicht so abwegig, als Lösung

$$y(x) = A(x)y_H(x)$$

zu versuchen, d.h. den *Ansatz* $y(x) = A(x)y_H(x)$ zu machen. Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} y'(x) &= A(x)y_H'(x) + A'(x)y_H(x) \\ &= A(x)a(x)y_H(x) + A'(x)y_H(x) \\ &= a(x)y(x) + A'(x)y_H(x). \end{aligned}$$

Wir müssen nur ein $A(x)$ finden, für das

$$A'(x)y_H(x) = b(x)$$

ist. Das tut

$$A(x) = A_0 + \int_{\alpha}^x \frac{b(\xi)}{y_H(\xi)} d\xi.$$

Allerdings darf y_H keine Nullstellen haben. Wie steht es damit? (*Sie* hatten doch (2) gelöst!) \square

SEPARABLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir sehen uns noch ein wenig bei (nichtlinearen) Differentialgleichungen erster Ordnung um und behandeln eine Verallgemeinerung des Beispiels 3, nämlich Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(x)g(y).$$

Wir wollen annehmen, dass die Funktionen rechts stetige Ableitungen haben („technische“ Voraussetzung). Dann hat nach einem allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsatz (vgl. Abschnitt 2) das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0,$$

eine eindeutig bestimmte Lösung. Um sie zu finden, betrachten wir

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Dazu nehmen wir an, dass $g(y_0) \neq 0$, also $g(y) \neq 0$ für kleines $|y - y_0|$.¹ Wir integrieren beide Seiten. Dabei berücksichtigen wir, dass nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \frac{1}{g(y(x))} y'(x).$$

¹Finden Sie die eindeutig bestimmte Lösung im Fall $g(y_0) = 0$.

Damit finden wir

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(\eta)} d\eta = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

Stellen Sie sich die Integrale gelöst vor. Dann ist das eine Gleichung für $y(x)$ ohne Ableitungen. Zu abstrakt? Betrachten Sie folgendes konkrete

Beispiel 5. Wir betrachten

$$y' = x(1 + y^2), \quad y(0) = 0.$$

Dann liefert die vorstehende Überlegung

$$\arctan y(x) = \int_0^{y(x)} \frac{1}{1 + \eta^2} d\eta = \int_0^x \xi d\xi = \frac{x^2}{2}.$$

Daraus folgt

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Beachten Sie, dass die Lösung dieses Anfangswertproblems nicht auf ganz \mathbb{R} definiert ist, sondern bei $x = \pm\sqrt{\pi}$ ins Unendliche verschwindet. \square

Verhältnismäßig häufig trifft man separable Differentialgleichungen, bei denen f konstant ist. Von diesem Typ sind die folgenden Beispiele.

Beispiel 6 (Kettenlinie).

Müller: Mechanik I, Abschnitt 4.6.2 oder Ziegler: Mechanik, Abschnitt 21

Die Form eines an zwei Punkten befestigten (homogenen) Seils unter dem Einfluss seines Eigengewichtes sei gegeben durch den Graphen einer Funktion $y(x)$, wobei $y(0)$ der Tiefpunkt des Seils sei. In der Mechnik untersucht man die Kräfteverhältnisse in dieser Situation und findet für die Ableitung $v(x) = y'(x)$ die Bedingung

$$v' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + v^2},$$

mit einer Konstanten a , die durch Seillänge und Position der Befestigungspunkte bestimmt ist. Das ist eine separable Differentialgleichung, und wir finden

$$\sinh^{-1} v = \frac{x}{a} + c_1.$$

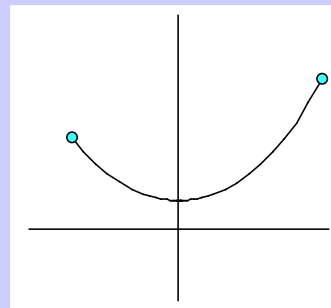
Die Voraussetzung über $y(0)$ bewirkt $c_1 = 0$, also

$$v(x) = \sinh \frac{x}{a}.$$

Durch nochmalige Integration erhält man

$$y(x) = a \cosh \frac{x}{a} + c.$$

Das ist die sogenannte *Kettenlinie*.



Beispiel 7 (Logistisches Gesetz). Ein weiteres wichtiges Beispiel liefert das sogenannte *logistische Gesetz* von VERHULST für das Wachstum von Populationen unter Berücksichtigung „sozialer Konkurrenz“:

$$\dot{y} = ay - by^2.$$

Wenn die unabhängige Variable die Zeit t ist, bezeichnet man die Ableitung oft mit \dot{y} statt mit y' . Ohne Konkurrenz (d.h. bei einer Population, die klein ist im Vergleich zu den zur Verfügung stehenden Ressourcen) ist das Wachstum proportional zur vorhandenen Population ($\dot{y} = ay$). Der Effekt der Konkurrenz ist proportional zur Zahl der Interaktionen zwischen Individuen der Population, also proportional zu y^2 . Die Separation liefert

$$1 = \frac{\dot{y}}{ay - by^2} = \frac{1}{a} \frac{\dot{y}}{y} + \frac{b}{a} \frac{\dot{y}}{a - by}.$$

Mit der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ folgt

$$\int_{t_0}^t du = \frac{1}{a} \int_{y_0}^y \left(\frac{\dot{y}}{y} + \frac{b\dot{y}}{a - by} \right) dt$$

und nach Ausführen der Integration

$$t - t_0 = \frac{1}{a} \left(\ln \frac{y}{a - by} - \ln \frac{y_0}{a - by_0} \right)$$

Wir finden

$$e^{a(t-t_0)} = \frac{y}{a - by} \frac{a - y_0}{y_0}.$$

Auflösen nach y liefert nach kurzer Rechnung

$$y(t) = \frac{ay_0 e^{a(t-t_0)}}{a - by_0 + by_0 e^{a(t-t_0)}} = \frac{ay_0}{(a - by_0)e^{-a(t-t_0)} + by_0}.$$

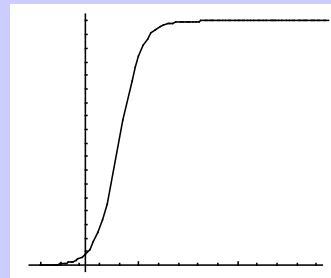
Daraus sieht man, dass $y(t)$ nach Ablauf einer langen Zeit (man sagt auch *asymptotisch*), annähernd konstant vom Wert a/b wird:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{a}{b}.$$

Wenn $|t - t_0|$ hingegen „relativ klein“ ist, hat man

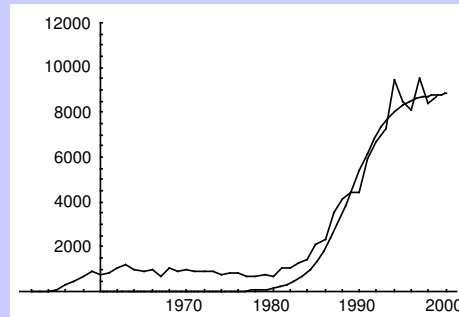
$$y(t) \approx y_0 e^{a(t-t_0)},$$

also ein exponentielles Wachstum. Beide Aspekte fügen sich zur VERHULSTschen „S-Kurve“ zusammen.



Beispiel 8 (Brutbestand des Kormorans in Brandenburg).

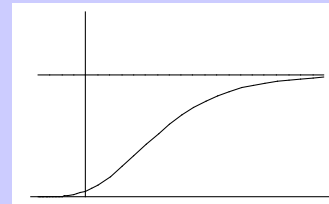
Das logistische Gesetz modelliert in gewissen Grenzen wirklich überzeugend reale Populationsdynamiken:



Beispiel 9 (Tumorstadium nach Gompertz). Auch das folgende Wachstumsmodell geht von einer Proportionalität der Wachstumsrate zur vorhandenen Menge aus, wobei allerdings der Proportionalitätsfaktor nicht konstant ist, sondern selbst exponentiell abnimmt:

$$\dot{y} = a e^{-bt} y.$$

Diese Differentialgleichung von GOMPERTZ beschreibt zum Beispiel das Wachstum von Tumoren oder die Ausbreitung von Rostfraß. Die Lösung finden Sie wieder durch Separation.



Beispiel 10 (Stationäre einseitige Diffusion).

Verfahrenstechnik I, Abschnitt 1

Die Differentialgleichung

$$\dot{m}_{Am}^{eins} = - \frac{D}{TR/\tilde{M}_A} \frac{p}{p - p_A(x)} \frac{dp_A(x)}{dx}$$

für die Funktion $p_A(x)$ beschreibt den stationären Stofftransport durch Diffusion². Gesucht sei eine Lösung mit der Anfangsbedingungen

$$p_A(0) = p_A^*.$$

Dazu nehmen wir an, dass $p > p_A$ und schreiben die Differentialgleichung als

$$\underbrace{\frac{TR/\tilde{M}_A}{pD} \dot{m}_{Am}^{eins}}_{=:\alpha} = \frac{(p - p_A(x))'}{(p - p_A(x))} = \frac{d \log(p - p_A(x))}{dx}$$

Es folgt

$$\log(p - p_A(x)) = \alpha x + \beta,$$

also

$$p - p_A(x) = C e^{bx}.$$

Wählen wir $C = p - p_A^*$, so stimmt auch die Anfangsbedingung.

1.3 Lösungen von Differentialgleichungen

- Wenn man die Lösung einer Differentialgleichung nicht einfach so hinschreiben kann, was dann?

Beispiel 11 (Pendelgleichung).

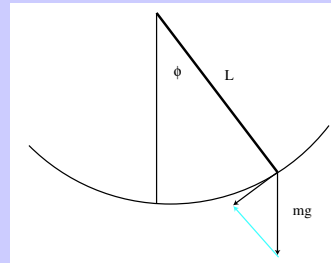
Müller: *Mechanik II*, Abschnitt 15.2

Der Ausschlagwinkel ϕ eines (ebenen starren) Pendels erfüllt die Differentialgleichung

$$mL\ddot{\phi} = -mg \sin \phi. \quad (3)$$

Wenn man nur kleine Ausschlagwinkel betrachtet, ist $\sin \phi \approx \phi$ und man kann die Gleichung *linearisieren*:

$$mL\ddot{\phi} = -mg\phi.$$



Das ist mit dem Exponentialansatz und trigonometrischen Funktionen leicht zu lösen, ganz im Gegensatz zur Originalgleichung (3): Für die können Sie aus den Funktionen, die Sie kennen, keine Lösungsfunktion $\phi(t)$ zusammenbasteln, die Gleichung ist nicht mit elementaren Funktionen lösbar.

Das kommt nicht überraschend. Sie kennen diese Situation schon von einem simplen Spezialfall der Differentialgleichungstheorie, nämlich aus der Integralrechnung. So einfache Funktionen wie $\sin(x^2)$ haben keine elementare Stammfunktion. Und dieser Fall kommt in der Praxis durchaus häufig vor, vor allem, wenn man die partiellen Differentialgleichungen mit einbezieht. Unter diesen Umständen ist es von besonderer Bedeutung sich über folgende Fragen Klarheit zu verschaffen:

- Existenz: Gibt es überhaupt Lösungen? (Sonst ist auch ein etwaiges „Ergebnis“ eines numerischen Verfahrens bestimmt keine Lösung!)
- Eindeutigkeit: Wenn es Lösungen gibt, durch welche zusätzlichen Forderungen ist dann eine Lösung eindeutig bestimmt. Wann können wir sicher sein, die „richtige“ Lösung gefunden zu haben?
- Eigenschaften: Welche Eigenschaften haben die Lösungen? Ist es möglich darüber Informationen direkt aus der Differentialgleichung zu gewinnen, auch wenn wir sie nicht explizit lösen können?
(Beispiel: Die Lösungen von $y' = 1 + y^4$ sind sicher alle monoton wachsend.)
- Stabilität: Gleichgewichtslösungen einer Differentialgleichung sind zeitlich konstante Lösungen. Was passiert bei Störungen des Gleichgewichts? Kehrt das System dann wieder in die Gleichgewichtslage zurück? Solche Fragen sind etwa in der Regelungstechnik von großem Interesse.
- Sensitivität: Diese Fragestellungen sind verwandt mit denen nach der Stabilität. Zum Beispiel für die Anwendung numerischer Verfahren ist es wichtig zu wissen, wie empfindlich die Lösungen auf kleine Störungen der Differentialgleichung (also der Koeffizienten) und der zusätzlichen Anfangs- oder Randbedingungen reagieren.

2 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

- Wir lernen, warum man im Prinzip nur Differentialgleichungen 1. Ordnung untersuchen muss.
- Wir lernen den grundlegenden Satz über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen kennen.

Beispiel 12 (NEWTONSCHE Bewegungsgleichung, Phasenraum).

Müller: *Mechanik II*, Abschnitt 12.2

Die Gleichung für die Bewegung eines Massenpunktes an der Stelle $\vec{y}(t)$ unter dem Einfluß einer von Zeit und Ort abhängigen Kraft $\vec{F}(t, \vec{y})$ ist

$$m\ddot{\vec{y}} = \vec{F}(t, \vec{y}).$$

Das ist also ein 3-dimensionales System 2. Ordnung.

Definieren wir den *Impuls* durch $\vec{p} := m\dot{\vec{y}}$, so erhalten wir ein 6-dimensionales System 1. Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{y}} &= \frac{1}{m}\vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= \vec{F}(t, \vec{y}).\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} \vec{y}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(t, \vec{x}) := \begin{pmatrix} \frac{1}{m}\vec{p} \\ \vec{F}(t, \vec{y}) \end{pmatrix}$$

schreibt sich das als $\dot{\vec{x}} = \vec{G}(t, \vec{x})$.

Offensichtlich kann man diesen Trick auf jede Differentialgleichung höherer Ordnung anwenden. Wir halten fest:

Jede Differentialgleichung höherer Ordnung läßt sich durch Einführen neuer abhängiger Variablen umschreiben in ein (höher-dimensionales) System 1. Ordnung der Form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(t, \vec{x}). \quad (4)$$

Definition 13 (Dynamisches System, Phasenraum). Wegen der Beziehung zum NEWTONSchen Problem nennt man Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung auch *dynamische Systeme*. Den von den Orts- und Impulskoordinaten gebildeten 6-dimensionalen Raum und allgemeiner den Raum der \vec{x} in (4) nennt man auch den *Phasenraum* des dynamischen Systems. Die Lösungen, also die Kurven $\vec{x}(t)$ heißen auch die *Phasenkurven* oder *Phasenbahnen*. Im NEWTONSchen Beispiel bekommt man daraus die Bahnkurve des Massenpunktes, indem man die letzten drei Komponenten von $\vec{x}(t)$, die sogenannten Impulskoordinaten „vergisst“.

Definition 14 (Autonomes System). Ein Differentialgleichungssystem der Form

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x}), \quad (5)$$

bei dem die rechte Seite nicht explizit von t abhängt, heißt ein *autonomes System*.

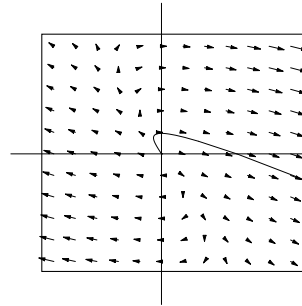
Beispiel 15. Jedes dynamische System $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(t, \vec{x})$ läßt sich als autonomes System umschreiben, indem man die unabhängige Variable t auch als gesuchte Funktion betrachtet:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{F}(t, \vec{x}) \end{pmatrix}.$$

□

Beispiel 16 (Phasendiagramm).

Insbesondere für zweidimensionale autonome Systeme lassen sich die Phasenkurven graphisch darstellen in einem sogenannten *Phasendiagramm*. Man kann sich (5) als ein Vektorfeld $\vec{G}(\vec{x})$ vorstellen, etwa das (stationäre) Strömungsfeld einer Flüssigkeit, zu dem man die Flußlinien sucht.



□

Konstruktion einer Lösung. Nun zur Frage nach der Existenz von Lösungen. Wir beschränken uns wegen Beispiel 15 auf ein autonomes Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (6)$$

Wenn \vec{G} konstant ist, bekommen wir durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + (t - t_0)\vec{G}$$

eine Lösung. Diese ist ein Streckenzug.

Wenn \vec{G} nicht konstant, aber stetig ist, können wir uns vorstellen, dass G wenigstens immer „ein Stück weit“ konstant ist, und können dann die Lösung (von der wir noch gar nicht wissen, ob sie existiert!) ein Stück weit geradlinig „approximieren“. Genauer betrachten wir eine Zeitsequenz

$$t_0 < t_1 = t_0 + h < t_2 = t_0 + 2h < \dots < t_N = t_0 + Nh$$

mit positiver Schrittweite $h > 0$. Damit definieren wir rekursiv

$$\begin{aligned} \vec{x}(h, t_0) &:= \vec{x}_0, \\ \vec{x}(h, t) &:= \vec{x}(h, t_i) + (t - t_i)\vec{G}(\vec{x}(h, t_i)), \quad t_i < t \leq t_{i+1}. \end{aligned}$$

$\vec{x}_h(t)$ ist dann also ein Polygonzug, und dieses Verfahren heißt das *EULERSche Polygonzugverfahren* oder kurz *EULERverfahren*.

Beispiel 17. Die Differentialgleichung

$$y' = -xy$$

schreiben wir als autonomes System

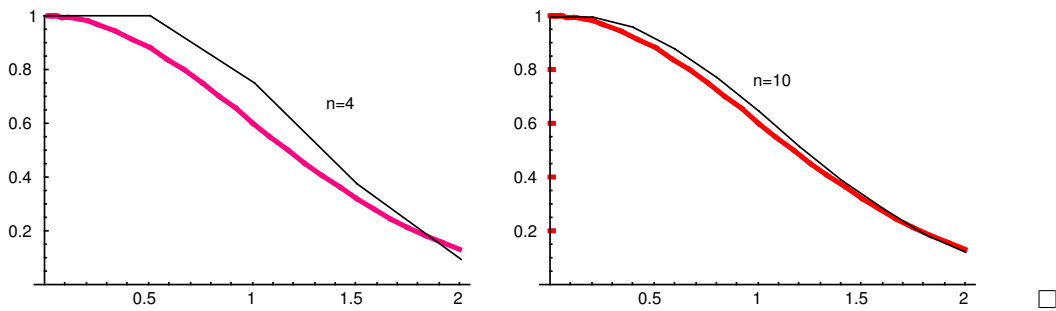
$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -xy \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $y(0) = 1$, also

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Anfangsbedingung. Die beiden folgenden Abbildungen zeigen die Ergebnisse des EULERverfahrens mit verschiedener Schrittweite im Vergleich mit der exakten Lösung

$$y(x) = e^{-x^2/2}.$$



Man kann nun für „halbwegs anständiges“ \vec{G} beweisen:

- Wenigstens für t -Werte nah bei t_0 , also auf einem Intervall $[t_0, t_0 + \epsilon[$ existiert der Grenzwert

$$\vec{x}(t) := \lim_{h \searrow 0} \vec{x}(h, t) \quad (7)$$

und definiert eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(\vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0.$$

- Je zwei Lösungen dieses Anfangswertproblems sind gleich, jedenfalls auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsintervalle.

Wir präzisieren das in einem Satz, der auch für den nicht-autonomen Fall gilt.

Satz 18 (Existenz- und Eindeigkeitssatz). Sei $\vec{G}(t, \vec{x})$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar³ und $(t_0, \vec{x}_0) \in U$ ein Punkt dieser Menge. Dann ist das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}} = \vec{G}(t, \vec{x}), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \quad (8)$$

eindeutig lösbar. Genauer gilt:

- (i) Es gibt ein Intervall J mit $t_0 \in J$, so dass das Anfangswertproblem (8) auf J eine Lösung $\vec{x}(t)$ hat, wobei

$$(t, \vec{x}(t)) \in U \text{ für alle } t \in J.$$

- (ii) Jede weitere Lösung von (8) auf einem Intervall um t_0 mit dieser Eigenschaft ist die Beschränkung der Lösung aus (i) auf ein Teilintervall von J .

Die Lösung in (i) ist also eine eindeutig bestimmte maximale Lösung.

Numerische Verfahren. Die Konvergenz für gegen 0 konvergierende Schrittweite wird im vorangehenden Beispiel glaubhaft vermittelt. Dennoch hat das EULERSche Polygonzugverfahren als numerisches Verfahren gewisse Schwächen, zum Beispiel bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit oder der Stabilität gegenüber Rundungsfehlern. Softwarepakete zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen benutzen deshalb Weiterentwicklungen des EULERSchen Verfahrens, insbesondere das sogenannte RUNGE-KUTTA-Verfahren, vgl. den Modul *Numerik I für Ingenieure*.

³Die Voraussetzung der stetigen Differenzierbarkeit kann wesentlich abgeschwächt werden. Zum Beispiel genügt es, wenn G stetig und nach den x -Komponenten stetig differenzierbar ist.

3 Gewöhnliche lineare Differentialgleichungssysteme

Wir untersuchen gekoppelte Systeme aus mehreren linearen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\&\quad \dots \\x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)\end{aligned}\tag{9}$$

mit stetigen Funktionen a_{ij} und b_i auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die t -Ableitung bezeichnen wir in Zukunft wegen bequemerer Notation mit einem Strich statt mit einem Punkt.

Mit Matrizen schreibt sich das kurz als

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t).\tag{10}$$

Solche Systeme kommen in der Praxis sehr häufig vor, nicht zuletzt deshalb, weil man über ihre Lösungen eine Menge weiß, und deshalb bei der Modellierung physikalische Probleme gern so lange vereinfacht, bis sie sich durch lineare Systeme beschreiben lassen. Natürlich ist das in der Regel nur eine erste Annäherung an die realen Verhältnisse.

Wir fragen also, wie die Lösungsmenge von (9)/(10) aussieht, und ob und wie man Lösungen explizit finden kann.

Ist $\vec{b}(t) = 0$, so nennt man das System *homogen*, andernfalls *inhomogen*. Zu jedem inhomogenen System gehört ein homogenes, bei dem einfach $\vec{b}(t)$ durch 0 ersetzt ist.

Warnung. Genauso wie bei gewöhnlichen linearen Gleichungssystemen hat man auch bei *Differentialgleichungssystemen* ein kleines Problem mit der Bezeichnung: *Eine* Lösung von (9)/(10) ist eine vektorwertige Funktion

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

mit den Komponentenfunktionen $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Wenn man dagegen verschiedene Lösungen von (9) oder (10) betrachtet, bezeichnet man die gern als $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$. Jetzt numeriert der Index also verschiedene Lösungen und nicht verschiedene Komponenten ein und derselben Lösung. Die Komponenten von \vec{x}_1 bezeichnen wir, wenn es nötig ist, mit $x_{11}(t), \dots, x_{n1}(t)$. Der *zweite* Index soll dann die Lösungen, der *erste* die Komponenten numerieren:

$$\vec{x}_j(t) = \begin{pmatrix} x_{1j}(t) \\ \vdots \\ x_{nj}(t) \end{pmatrix}.$$

Schreibt man mehrere Lösungen in eine Matrix, so stehen sie dort also als *Spalten*.

3.1 Struktur des Lösungsraumes

- Lineare Differentialgleichungen besitzen eine starke Analogie zur linearen Gleichungssystemen und wie diese einen sehr einfach strukturierten Lösungsraum.
- Wir lernen einen Test auf lineare Unabhängigkeit von (Lösungs)funktionen kennen.
- Wir lernen ein Verfahren zur Lösung einer *inhomogenen* linearen DGL, wenn die zugehörige *homogene* Gleichung gelöst ist.

Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz, der Satz 18, garantiert die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems, ohne etwas darüber zu sagen, wie lange die Lösung lebt: Auf einem Intervall um t_0 herum eben, aber es ist unklar, wie groß das ist, vgl. Beispiel 5.

Ganz anders bei *linearen* Differentialgleichungen. Dort leben die Lösung „so weit wie die Differentialgleichung“:

Satz 19 (Existenz und Eindeigkeitsatz). *Haben $A(t)$ und $\vec{b}(t)$ auf dem Intervall I stetige Koeffizienten $a_{ij}(t)$ und $b_i(t)$ und ist $t_0 \in I$, so hat das Anfangswertproblem*

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \quad (11)$$

$$\vec{x}(t_0) = \vec{\eta}_0 \quad (12)$$

für jedes $\vec{\eta}_0 = \begin{pmatrix} \eta_{10} \\ \vdots \\ \eta_{n0} \end{pmatrix}$ genau eine auf ganz I definierte Lösung.

Weil alle Lösungen auf demselben Intervall definiert sind, kann man auch über Linearkombinationen von Lösungen reden, und es gilt:

Satz 20 (Lösungsraum der homogenen Gleichung). *Der Lösungsraum der homogenen Gleichung*

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x}. \quad (13)$$

ist ein Vektorraum der Dimension n . Das heißt:

- *Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen: Es gilt das Superpositionsprinzip.*
- *Es gibt n linear unabhängige Lösungen.*
- *Sind die Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ linear unabhängig, so ist jede andere Lösung eine Linearkombination von diesen:*

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + \dots + c_n\vec{x}_n(t) \quad (14)$$

Man nennt $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ eine Lösungsbasis oder ein Fundamentalsystem von Lösungen und (14) „die allgemeine Lösung von (13)“.

Die Vorgabe eines Anfangswertes $\vec{x}(t_0) = \vec{\eta}_0$ bestimmt die Koeffizienten c_i in der allgemeinen Lösung eindeutig.

Lineare Unabhängigkeit: Wronskitest. Wir betrachten Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ von (13) und wollen wissen, ob sie linear unabhängig sind. Sind zunächst die Vektoren

$$\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)$$

an einer Stelle t_0 linear unabhängig, so sind $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ als Funktionen linear unabhängig:

Aus

$$\lambda_1 \vec{x}_1(t) + \dots + \lambda_n \vec{x}_n(t) = \vec{0}$$

für *alle* t folgt nämlich insbesondere

$$\lambda_1 \vec{x}_1(t_0) + \dots + \lambda_n \vec{x}_n(t_0) = \vec{0}.$$

Weil diese Vektoren linear unabhängig sind, ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Aus dem Eindeutigkeitsatz für das Anfangswertproblem folgt für Lösungen von (13) auch die Umkehrung. Daher sind die Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ genau dann linear unabhängig, wenn die Funktionswerte $\vec{x}_1(t_0), \dots, \vec{x}_n(t_0)$ an einer Stelle (und dann an jeder Stelle) linear unabhängig sind. Also sind die Lösungen $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)$ genau dann linear unabhängig, wenn die aus ihnen gebildete Matrix

$$W = (\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)),$$

die sogenannte WRONSKIMATRIX, an einer und dann an jeder Stelle t vollen Rang $= n$ bzw. Determinante $\neq 0$ besitzt.

Machen Sie sich klar, warum Linearkombinationen von Lösungen des *inhomogenen* Systems im allgemeinen *keine* Lösungen liefern. Und rechnen Sie nach, dass wenn $\vec{x}_1(t)$ und $\vec{x}_2(t)$ zwei Lösungen des inhomogenen Systems sind, dass dann $x(t) = \vec{x}_1(t) - \vec{x}_2(t)$ das zugehörige homogene System löst. Dann haben Sie bewiesen:

Satz 21 (Lösungsraum des inhomogenen Systems). Sei $\vec{x}_P(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\vec{x}' = A(t)\vec{x} + \vec{b}(t). \quad (15)$$

Man nennt das auch eine partikuläre oder spezielle Lösung von (15). Dann findet man alle Lösungen von (15), indem man zu \vec{x}_P alle Lösungen \vec{x}_H der homogenen Gleichung (13) addiert. Man sagt,

$$\vec{x} = \vec{x}_P + \vec{x}_H$$

ist die allgemeine Lösung von (15), wenn \vec{x}_H die allgemeine Lösung von (13) ist. Ist $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ eine Lösungsbasis für die homogene Gleichung, so ist also die Menge der Lösungen der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$\vec{x} = \vec{x}_P + c_1 \vec{x}_1 + \dots + c_n \vec{x}_n$$

mit beliebigen Konstanten c_1, \dots, c_n .

Damit ist die Struktur des Lösungsraumes linearer Differentialgleichungssysteme geklärt. Bleibt die Frage, wie man Lösungen von (15) finden kann. Wir erklären im nächsten Abschnitt, wie man bei konstanter Systemmatrix A und $\vec{b}(t) = \vec{0}$ vorgeht, um eine Lösungsbasis

für das homogene System zu finden. Wenn man die hat, gibt es (auch bei variabler Matrix A) ein Verfahren zur Bestimmung einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems:

Satz 22 (Variation der Konstanten). Sei $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung (13). Mit der Wronskimatrix der \vec{x}_i bilde man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Die (eindeutig bestimmten) Lösungsfunktionen c'_i integriere man. Dann erhält man mit

$$\vec{x}_P(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}_n(t)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (11).

Beweis. Wir machen den Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{x}_P(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}_n(t)$ und setzen dies in das Differentialgleichungssystem ein. Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t) &= c_1(t)\vec{x}'_1(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}'_n(t) + c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t) \\ &= c_1(t)A(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)A(t)\vec{x}_n(t) + c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t) \\ &= A(t)(c_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c_n(t)\vec{x}_n(t)) + c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t) \\ &= A(t)\vec{x}(t) + c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t). \end{aligned}$$

Also ist $\vec{x}(t)$ genau dann eine Lösung des inhomogenen Systems (11), wenn

$$c'_1(t)\vec{x}_1(t) + \dots + c'_n(t)\vec{x}_n(t) = \vec{b}(t).$$

In Matrixschreibweise ist das aber gerade (16). □

Beispiel 23. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 3x_2 + 2\cos^2 t \\ x'_2 &= 3x_1 + x_2 + 2\sin^2 t \end{aligned} \quad (17)$$

Lösung des zugehörigen homogenen Systems. Das zugehörige homogene System hat folgende Lösungsbasis

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Wie wir die gefunden haben, erklären wir später.

Variation der Konstanten. Wir machen den Ansatz $\vec{x}_P(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t)$ und lösen

$$\begin{pmatrix} e^{4t} & e^{-2t} \\ e^{4t} & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$c'_1(t) = e^{-4t}, \quad c'_2(t) = (\cos^2 t - \sin^2 t)e^{2t} = \cos 2t e^{2t}.$$

Nun müssen wir die $c'_j(t)$ integrieren:

$$c_1(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t}, \quad c_2(t) = \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t)e^{2t}.$$

Einsetzen in den Ansatz liefert

$$\vec{x}_P(t) = -\frac{1}{4}e^{-4t} \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t)e^{2t} \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t - 1) \\ -\frac{1}{4}(\sin 2t + \cos 2t + 1) \end{pmatrix}$$

als eine spezielle Lösung von (17). □

Eine andere „Methode“, um eine partikuläre Lösung zu finden, ist das

Erraten einer Lösung. Wir wollen hier nur folgenden Fall betrachten:

$$\vec{x}' = A\vec{x} - e^{\mu t}\vec{b} \quad (18)$$

mit konstanten A und \vec{b} . Der Parameter μ kann reell oder auch komplex sein, so dass der Fall einer „trigonometrischen“ rechten Seite mit erfaßt ist. Wir machen den Ansatz

$$\vec{x}(t) = e^{\mu t}\vec{v} \quad (19)$$

mit einem konstanten Vektor \vec{v} . Einsetzen liefert

$$\mu e^{\mu t}\vec{v} = e^{\mu t}A\vec{v} - e^{\mu t}\vec{b}$$

oder

$$A\vec{v} - \mu\vec{v} = \vec{b}.$$

Das sieht in Komponenten so aus:

$$\begin{array}{rcccc} (a_{11} - \mu)v_1 + & a_{12}v_2 + & \dots + & a_{1n}v_n & = b_1 \\ a_{21}v_1 + & (a_{22} - \mu)v_2 + & \dots + & a_{2n}v_n & = b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{n1}v_1 + & a_{n2}v_2 + & \dots + & (a_{nn} - \mu)v_n & = b_n \end{array}$$

Also ist (19) genau dann eine Lösung von (18), wenn \vec{v} dieses lineare Gleichungssystem löst. Beachten Sie aber, dass das Gleichungssystem nicht unbedingt lösbar sein muß; dann führt der obige Ansatz nicht zum Ziel. Das kann passieren, wenn μ ein Eigenwert der Matrix A ist, d.h. wenn das System mit Schwingungen in Eigenfrequenz angeregt wird (*Resonanzfall*).

Beispiel 24. Für eine Gleichung der Form

$$\vec{x}' = A\vec{x} - \cos \omega t \vec{b}$$

mit reellen A und \vec{b} löst man

$$\vec{x}' = A\vec{x} - e^{i\omega t}\vec{b}$$

mit der vorstehenden Methode und nimmt dann den Realteil der Lösung. □

3.2 Der Exponentialansatz (die Eigenwertmethode)

- Die Linearen Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten bilden die einzige größere Klasse von Differentialgleichungen, die man mit einer elementaren Methode lösen kann.
- Wichtiges Hilfsmittel dabei ist die Theorie von Eigenwerten und -vektoren einer quadratischen Matrix.

In diesem Abschnitt behandeln wir die Eigenwertmethode zur Lösung homogener linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten.

Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\&\dots \\x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{20}$$

mit Konstanten a_{ij} . Mit Matrizen und Vektoren schreibt sich das kurz als

$$\vec{x}' = A\vec{x}.\tag{21}$$

Weil bei der Differentialgleichung $x' = ax$ offenbar der Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ erfolgreich ist, nämlich mit $\lambda = a$ eine Lösung liefert, probieren wir für (21) etwas ähnliches. Weil die Lösungsfunktion $\vec{x}(t)$ vektorwertig sein muss, versuchen wir den Ansatz

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}.\tag{22}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung zeigt, dass dies genau dann eine Lösung liefert, wenn $\lambda e^{\lambda t}\vec{v} = A(e^{\lambda t}\vec{v})$, d.h. wenn nach Division mit $e^{\lambda t} \neq 0$ gilt

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Diese Gleichung für λ und \vec{v} hat natürlich immer die Lösung $\vec{v} = \vec{0}$ und λ beliebig, aber die liefert auch nur die triviale Lösung der homogenen Differentialgleichung. Daran sind wir nicht interessiert. Interessant sind Lösungen mit $\vec{v} \neq \vec{0}$, bei denen also λ ein Eigenwert und \vec{v} ein zugehöriger Eigenvektor von A ist. Wie man zu einer gegebenen Matrix die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen kann, wissen Sie aus dem Modul *Lineare Algebra für Ingenieure*. Die Ergebnisse finden Sie noch einmal im Anhang Abschnitt 11.1.

Wir haben also gefunden:

$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ ist genau dann eine (nicht-triviale) Lösung der Differentialgleichung

$$\vec{x}' = A\vec{x},\tag{23}$$

wenn λ ein Eigenwert und \vec{v} ein zugehöriger Eigenvektor von A sind.

Beispiel 25. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem $\vec{x}' = A\vec{x}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Die charakteristische Gleichung ist

$$\det(A - \lambda E) = 45 + 21\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

Sie hat die Lösungen -3 und 5 , wobei -3 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Eigenvektoren zum Eigenwert -3 . Wir erhalten das Gleichungssystem

$$(A - (-3)E) \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Man sieht mit bloßem Auge, dass die zweite und dritte Gleichung Vielfache der ersten sind. Es bleibt also nur die Gleichung

$$x + 2y - 3z = 0$$

und wir können zwei Parameter frei wählen: Der Lösungsraum, der sogenannte Eigenraum zum Eigenwert -3 ist zweidimensional.

$$z = 0, y = 1 \implies x = -2$$

$$z = 1, y = 0 \implies x = 3$$

Mit diesen Wahlen erhalten wir zwei linear unabhängige Eigenvektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert $\lambda = -3$.

Eigenvektoren zum Eigenwert 5 . Wir erhalten das Gleichungssystem

$$(A - 5E) \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Mit dem Gaußalgorithmus ergibt sich das äquivalente System

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

mit der Lösung $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Eigenvektor zum Eigenwert 5 .

Die allgemeine Lösung von $\vec{x}' = A\vec{x}$ ist daher

$$\vec{x}(t) = e^{-3t} \left(c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Wie viele unabhängige Lösungen liefert die Eigenwertmethode? Im optimalen Fall hat eine n -reihige Matrix n -verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sind nach einem Satz der linearen Algebra dann linear unabhängig, und der WRONSKITEST liefert, dass

$$e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1, \dots, e^{\lambda_n t} \vec{v}_n$$

eine Lösungsbasis bilden. Aber es kann folgende Probleme geben:

1. Auch bei reeller Matrix A können komplexe Eigenwerte auftreten. Dann sind die zugehörigen Eigenvektoren auch komplex, und man erhält eben eine komplexe Lösungsbasis. Wenn man aber an einer reellen Lösungsbasis interessiert ist, muss man noch ein wenig arbeiten.
2. Das charakteristische Polynom kann mehrfache Nullstellen haben, und dann sind es eben nicht mehr n verschiedene. Aber zu einer k -fachen Nullstelle, man sagt zu einem *Eigenwert der algebraischen Vielfachheit k* , kann es durchaus k linear unabhängige Eigenvektoren geben. Dann sagt man, die *geometrische Vielfachheit* sei gleich der algebraischen, und alles geht problemlos wie oben, der Eigenwert liefert k linear unabhängige Lösungen.
3. Ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit $k > 1$ kann aber auch nur weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren besitzen, die geometrische Vielfachheit kann kleiner sein als die algebraische. Wie findet man dann dazu k unabhängige Lösungen der Differentialgleichung?

Dem ersten und dritten Fall wenden wir uns jetzt zu.

Komplexe Eigenwerte. Sei A eine reelle Matrix. Wenn das charakteristische Polynom komplexe Nullstellen hat, treten diese in komplex-konjugierten Paaren $\lambda = \alpha + i\omega$ und $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$ auf. Auch die entsprechenden Eigenvektoren sind dann konjugiert-komplex.

Für die Lösung der Differentialgleichung kann man von komplex-konjugierten Paaren von Lösungen je eine vergessen, wenn man von der verbleibenden den Real- und Imaginärteil nimmt.

Das ist klar, weil Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, die Gleichung ist ja homogen(!), und weil für komplexes z

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}z - \frac{1}{2i}\bar{z}.$$

Beispiel 26. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

hat die charakteristische Gleichung $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$. Sie hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Offensichtlich sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

zugehörige Eigenvektoren. Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

hat daher die allgemeine komplexe Lösung

$$\vec{x}(t) = c_1 e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Die Lösung

$$e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

liefert die allgemeine reelle Lösung

$$\vec{x}(t) = a_1 e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + a_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Die komplexe Lösung $e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ kann man also vergessen. \square

Defizite bei den Eigenvektoren. Die Eigenvektoren sind Lösungen der Eigenvektorgleichungen

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$$

zu den verschiedenen Eigenwerten λ der n -reihigen Matrix A . Im Idealfall gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren. Wenn das aber nicht so ist, gibt es mehrfache Eigenwerte, zum Beispiel einen Eigenwert λ der algebraischen Vielfachheit $k > 1$, zu dem weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren existieren. In der linearen Algebra zeigt man, dass es in diesem Fall zu λ immer noch k linear unabhängige *Hauptvektoren* gibt, die gewissermaßen einen Ersatz für die Eigenvektoren bilden. Ein Hauptvektor ist eine nicht-triviale Lösung der Gleichung

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0,$$

woraus man sofort ersieht, dass Eigenvektoren auch Hauptvektoren sind, weil ja

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = (A - \lambda E)^{k-1} (A - \lambda E) \vec{v}$$

ist.

Wir beschreiben ein Verfahren zur Gewinnung einer Lösungsbasis des homogenen linearen Differentialgleichungssystems (21), wenn es nicht genügend linear unabhängige Eigenvektoren gibt.

Satz 27 (Hauptvektorenlösungen). *Ist λ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A und \vec{v} eine Lösung von*

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0, \tag{24}$$

also ein Hauptvektor, so ist

$$\vec{x}(t) := e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v} = e^{\lambda t} \left(\vec{v} + t(A - \lambda E)\vec{v} + \dots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (A - \lambda E)^{k-1} \vec{v} \right) \tag{25}$$

eine Lösung von

$$\vec{x}' = A\vec{x}.$$

Es gibt immer k linear unabhängige Lösungen von (24), und solche führen zu linear unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen. Dabei hat man es leichter, wenn man beachtet, dass $(A - \lambda E)^m \vec{v} = 0$ für alle $m \geq k$. Deshalb kann man die Summe in (25) einfach bis ∞ laufen lassen. Wir schreiben

$$\vec{x}_0(t) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}\vec{x}_0'(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda E)^j \vec{v} = (A - \lambda E) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} (A - \lambda E)^{j-1} \vec{v} \\ &= (A - \lambda E) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v} = (A - \lambda E) \vec{x}_0(t).\end{aligned}$$

Daher ist

$$\vec{x}'(t) = \frac{d}{dt} e^{\lambda t} \vec{x}_0(t) = \lambda \vec{x}(t) + (A - \lambda E) \vec{x}(t) = A \vec{x}(t).$$

□

So einfach dieser Beweis im Grunde ist, so mysteriös erscheint die Formel (25). Wie ist man darauf gekommen? Dahinter steckt wieder eine ganz einfache Idee, deren technische Umsetzung aber einige Erklärung erfordert. Wir behandeln sie im Anhang 11.2.

Die direkte Anwendung des Satzes mit den Hauptvektoren ist mühsam, denn man muss die Matrixpotenzen bis $(A - \lambda E)^k$ bilden. Einfacher geht es bei doppelten Nullstellen, und es lohnt, sich diesen häufiger auftretenden Fall zu merken:

Beispiel 28. Ist λ ein **zweifacher** Eigenwert bei beliebiger Dimension, so berechnet man zunächst einen Eigenvektor \vec{v}_1 . Dazu muß man die Matrix $A - \lambda E$ bilden. Gibt es nun zu λ keinen zweiten linear unabhängigen Eigenvektor, so gibt es einen von \vec{v}_1 linear unabhängigen *Hauptvektor* \vec{v}_2 . Für den gilt

$$0 = (A - \lambda E)^2 \vec{v}_2 = (A - \lambda E)((A - \lambda E)\vec{v}_2).$$

Das heißt, $(A - \lambda E)\vec{v}_2$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , also von der Form $a\vec{v}_1$. Wir haben daher

$$(A - \lambda E)\left(\frac{1}{a}\vec{v}_2\right) = \vec{v}_1.$$

Weil es auf Vielfache $\neq 0$ bei Eigen- und Hauptvektoren nicht ankommt, können wir den Faktor $1/a$ vergessen.

Fazit: Für einen Eigenvektor \vec{v}_1 ist das Gleichungssystem

$$\boxed{(A - \lambda E)\vec{v}_2 = \vec{v}_1}$$

lösbar und liefert uns „den“ fehlenden Hauptvektor zum Eigenwert λ . Die zugehörige Lösung ist dann

$$\boxed{\vec{y}(t) = e^{\lambda t}(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1)}.$$

□

Beispiel 29. Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Die Gleichung

$$(A - 1E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert einen linear unabhängigen Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Daher liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einen Hauptvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 1. Das Differentialgleichungssystem

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}$$

hat in diesem Fall eine Lösungsbasis aus

$$\vec{x}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und einer weiteren Lösung $\vec{x}_3(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 2. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 t e^t \\ c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t \\ -c_2 e^t + c_3 e^t \end{pmatrix}$$

□

4 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

- Skalare lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung kann man durch Einführen von Hilfsvariablen äquivalent umschreiben als ein lineares System 1. Ordnung.
- Dann überträgt sich die Lösungstheorie von den Systemen auf den skalaren Fall.
- Für die konkrete Lösung skalarer Gleichungen kann man diese aber auch - und einfacher - direkt behandeln.

Wir betrachten nun gewöhnliche lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung für reell- oder komplexwertige Funktionen. Im Gegensatz zu den Differentialgleichungssystemen spricht man auch von *skalaren* Differentialgleichungen.

Die allgemeine Form ist diese:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t) \quad (26)$$

mit stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen $a_k(t)$ und $b(t)$ auf einem Intervall I . Ist $b = 0$, so nennt man die Gleichung *homogen*, andernfalls *inhomogen*.

Beispiel 30. Ein Beispiel liefert die Bewegungsgleichung für ein Federpendel der Masse m mit Federkonstante k und Reibungskoeffizient a :

$$mx'' + ax' + kx = 0, \quad (27)$$

die nach Normierung mit $\frac{1}{m}$ in die vorstehende Form übergeht.

Wenn man in diesem Beispiel die Geschwindigkeit mit $v = x'$ bezeichnet, ist die Gleichung äquivalent zu einem linearen System, nämlich

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\frac{b}{m}x - \frac{a}{m}v \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{a}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Jede Lösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ dieses Systems liefert durch "Vergessen" der zweiten Komponente eine Lösung von (27). Umgekehrt liefert jede Lösung $x(t)$ von (27) zusammen mit ihrer Ableitung eine Lösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ von (28). \square

Skalare Gleichungen und Systeme. Allgemein ist

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t) \quad (29)$$

nach Einführung von "Hilfsfunktionen" $x_1(t) := x(t), x_2(t) := x(t)', \dots, x_n(t) := x^{(n-1)}(t)$ äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Als Konsequenz ist die Theorie der skalaren Differentialgleichungen n -ter Ordnung ein Spezialfall der Systeme 1. Ordnung, und beide Theorien stimmen weitgehend überein. Der nächste Abschnitt ist deshalb einfach eine mehr oder weniger wörtliche Übersetzung des entsprechenden Abschnitts über Systeme.

4.1 Struktur des Lösungsraumes

- Die Strukturen des Lösungsraums sind analog zum Fall von Systemen 1. Ordnung.
- Der Wronskitest ist in diesem Fall “interessanter”.
- Und die Methode der Variation der Konstanten klappt auch.

Satz 31 (Existenz und Eindeigkeitsatz). Gegeben sei Gleichung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t) \quad (31)$$

mit stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen $a_k(t)$ und $b(t)$ auf einem Intervall I . Sei $t_0 \in I$ und seien Anfangswerte

$$x(t_0) = \eta_0, x'(t_0) = \eta_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1}$$

vorgegeben. Dann gibt es genau eine Lösung $x(t)$ von (31) mit diesen Anfangswerten.

Weil alle Lösungen auf demselben Intervall definiert sind, kann man auch über Linearkombinationen von Lösungen reden, und es gilt:

Satz 32 (Lösungsraum der homogenen Gleichung). Der Lösungsraum der homogenen Gleichung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0 \quad (32)$$

ist ein Vektorraum der Dimension n . Das heißt:

- Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen: Es gilt das Superpositionsprinzip.
- Es gibt n linear unabhängige Lösungen.
- Sind die Lösungen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ linear unabhängig, so ist jede andere Lösung eine Linearkombination von diesen:

$$x(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t) \quad (33)$$

Man nennt $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Lösungsbasis oder ein Fundamentalsystem von Lösungen und (33) „die allgemeine Lösung von (32)“.

Lineare Unabhängigkeit: Wronskitest. Wir betrachten Lösungen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ von (32) und wollen wissen, ob sie linear unabhängig sind. Wir erinnern uns an die Umschreibung der Differentialgleichung als System und bilden die Matrix

$$W = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Die Lösungen sind genau dann linear unabhängig, wenn diese Matrix an einer (und dann an jeder) Stelle x den Rang n , also eine Determinante $\neq 0$ hat.

Satz 33 (Lösungsraum des inhomogenen Systems). Sei $x_P(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t) \quad (34)$$

Man nennt das auch eine partikuläre oder spezielle Lösung von (34). Dann findet man alle Lösungen von (34), indem man zu x_P alle Lösungen $x_H(t)$ der zugehörigen homogenen Gleichung (32) addiert. Man sagt,

$$x(t) = x_P(t) + x_H(t)$$

ist die allgemeine Lösung von (15), wenn \vec{x}_H die allgemeine Lösung von (13) ist.

Ist $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Lösungsbasis für die homogene Gleichung, so ist also die Menge der Lösungen der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$x(t) = x_P(t) + c_1x_1(t) + \dots + c_nx_n(t)$$

mit beliebigen Konstanten c_1, \dots, c_n .

Damit ist die Struktur des Lösungsraumes linearer Differentialgleichungen n -ter Ordnung geklärt. Bleibt die Frage, wie man Lösungen von (34) finden kann. Wir erklären im nächsten Abschnitt, wie man bei konstanten Koeffizienten und $b(t) = 0$ vorgeht, um eine Lösungsbasis für die homogene Gleichung zu finden. Wenn man die hat, gibt es (auch bei variablen a_i) ein Verfahren zur Bestimmung einer partikulären Lösung des inhomogenen Systems:

Satz 34 (Variation der Konstanten). Sei $x_1(t), \dots, x_n(t)$ eine Lösungsbasis der homogenen Gleichung (32). Mit der WRONSKIMATRIX der x_i bilde man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1' & \dots & x_n' \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \dots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Die (eindeutig bestimmten) Lösungsfunktionen c_i' integriere man. Dann erhält man mit

$$x_P(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t)$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (34).

Beispiel 35. Wir betrachten

$$x'' + x = \tan t. \quad (36)$$

Offenbar sind $x_1(t) = \cos t$ und $x_2(t) = \sin t$ Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung. Die WRONSKIMATRIX ist

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

mit Determinante = 1, also haben wir eine Lösungsbasis. Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tan t \end{pmatrix}$$

hat die Lösungen

$$c_1' = -\sin t \tan t, \quad c_2' = \sin t$$

und mit ein wenig Integrieren findet man

$$c_1 = -\ln \frac{1 + \sin t}{\cos t} + \sin t, \quad c_2 = -\cos t.$$

Das liefert die partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_P(t) &= -\ln \frac{1 + \sin t}{\cos t} \cos t + \sin t \cos t - \cos t \sin t \\ &= -\cos t \ln \frac{1 + \sin t}{\cos t} \end{aligned}$$

Das hätte man nicht so einfach geraten. Die allgemeine Lösung der Gleichung (36) ist

$$y(t) = -\cos t \ln \frac{1 + \sin t}{\cos t} + c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

□

Ansatz vom Typ der rechten Seite. Natürlich kann man versuchen, eine partikuläre Lösung von

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = b(t)$$

zu raten. Bei einfacher rechter Seite mag das gelingen. Weiter kommt man mit der Überlegung, dass die linke Seite für $x(t) = q(t)e^{\mu t}$ mit einem Polynom $q(t)$ wieder einen Ausdruck derselben Form $p(t)e^{\mu t}$ mit einem anderen Polynom ist. Ist also $b(t) = p(t)e^{\mu t}$ von dieser Form, so kann man den Ansatz $y(t) = q(t)e^{\mu t}$ mit einem allgemeinen Polynom $q(t)$ machen und versuchen, dessen Koeffizienten durch Koeffizientenvergleich entsprechend zu bestimmen.

Welchen Ansatz würden Sie versuchen, wenn $b(t) = \cos x$?

4.2 Der Exponentialansatz

- Der Exponentialansatz wird einfacher als bei Systemen: Keine Determinanten, keine Eigenvektorberechnung.

Wir betrachten nun das Problem, Lösungen der homogenen Gleichung n -ter Ordnung zu finden:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0. \quad (37)$$

Wenn die Koeffizienten a_i konstant sind, und nur diesen Fall wollen wir jetzt betrachten, liefert die Umschreibung in ein System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (38)$$

kurz

$$\vec{x}' = A\vec{x},$$

eine konstante Systemmatrix A , und wir wissen schon, wie die Lösungen dann aussehen: Man erhält Lösungsbasisfunktionen der Form $x(t) = e^{\lambda t}$, "schlimmstenfalls" zusätzlich noch solche der Form $x(t) = t^k e^{\lambda t}$, wenn nämlich beim System Hauptvektoralösungen erforderlich werden. Dabei sind die λ die Eigenwerte der Systemmatrix. Es ist nicht so einladend, das charakteristische Polynom einer Matrix der Form aus (38) zu bestimmen. Aber wenn man in (37) den Ansatz

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

einsetzt, findet man sofort, dass genau die Lösungen der Gleichung

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (39)$$

auch Lösungen der Differentialgleichung liefern, und tatsächlich ist dies (bis auf ein mögliches Vorzeichen der linken Seite) die charakteristische Gleichung auch der Matrix A .

Hat diese n verschieden Lösungen, so erhält man eine Lösungsbasis, möglicherweise allerdings mit komplexen Funktionen

$$e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t}(\cos \omega t + i \sin \omega t),$$

die man wieder in Real- und Imaginärteil zerlegen kann, um eine reelle Lösungsbasis zu gewinnen.

Beispiel 36. Betrachte

$$x'' + 6x' + 10x = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ hat dann die Lösungen

$$\lambda_1 = -3 + i, \lambda_2 = -3 - i,$$

und die liefern die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{(-3+i)t} + c_2 e^{(-3-i)t}. \quad (40)$$

Die allgemeine reelle Lösung erhält man aus $e^{(-3+i)t} = e^{-3t}(\cos t + i \sin t)$ durch Zerlegen. Sie ist

$$x(t) = c_1 e^{-3t} \cos t + c_2 e^{-3t} \sin t.$$

□

Mehrfache Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Bei Matrizen der Form (38) kann die Situation mehrfacher Eigenwerte mit mehreren linear unabhängigen Eigenvektoren nicht auftreten, man ist immer in der Hauptvektor-Situation, die im skalaren Fall aber sehr einfach ist:

Eine k -fache Nullstelle λ der charakteristischen Gleichung (39) liefert linear unabhängige Lösungsbasisfunktionen

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}.$$

Beispiel 37. Betrachte

$$x'' + 6x' + 9x = 0.$$

Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ hat dann die Lösungen

$$\lambda_1 = -3 = \lambda_2.$$

Die liefern für die Differentialgleichung die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}. \tag{41}$$

□

5 Nichtlineare Gleichungen und Erhaltungsgrößen

- Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage, wie man Informationen über die Lösungen von dynamischen Systemen finden kann, die man nicht explizit lösen kann.

Beispiel 38 (Räuber-Beute-Modell und Volterra-Prinzip). Wir betrachten ein häufig benutztes dynamisches System, das sogenannte Räuber-Beute-Modell von VOLTERRA. Es ist eine Weiterentwicklung der logistischen Gleichung von Verhulst aus Beispiel 7. In einem System mit Beute- und Räuberindividuen nimmt man an, dass die Zahl x der Beutetiere exponentiell wächst, wenn keine Räuber vorhanden sind: $\dot{x} = ax$. Beim Vorhandensein von y Räubern ist die Zahl der Räuber-Beute-Begegnungen proportional zu xy , und deshalb korrigiert sich die vorstehende Gleichung zu $\dot{x} = ax - bxy$. Ebenso nehmen die Räuber in Abwesenheit von Beute exponentiell ab und man findet $\dot{y} = cxy - dy$. Sind schließlich die Ressourcen für die Beutetiere nicht unbegrenzt, so kommt ein Korrekturterm für die „soziale Reibung“ hinzu, und Analoges gilt für die Räuber. Schließlich ergibt sich das sogenannte VOLTERRA-LOTKA-Modell

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy - \lambda x^2 \\ \dot{y} &= cxy - dy - \mu y^2\end{aligned}$$

mit nicht-negativen Konstanten a, b, c, d, λ, μ . (Für negatives c und d moduliert dieses System die Populationsdynamik zweier konkurrierender Spezies.)

Die Größe der verschiedenen Parameter ist entscheidend für den Verlauf der Phasenkurven. Wir betrachten hier zunächst den Fall ohne soziale Reibung, also

$$\lambda = \mu = 0.$$

Im Punkt $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{d}{c}, \frac{a}{b})$, verschwindet die rechte Seite, und das bedeutet, dass

$$x(t) := \bar{x}, \quad y(t) := \bar{y}$$

eine (konstante) Lösung der Differentialgleichung ist, ein sogenanntes Gleichgewicht. Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

Jetzt machen wir eine kleine trickreiche Rechnung. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit d/x , die zweite mit a/y und addieren:

$$\begin{aligned}d\frac{\dot{x}}{x} + a\frac{\dot{y}}{y} &= ad - bdy + acx - ad = acx - cbxy + cbxy - bdy \\ &= c(ax - bxy) + b(cxy - dy) \\ &= c\dot{x} + b\dot{y}.\end{aligned}$$

Also ist

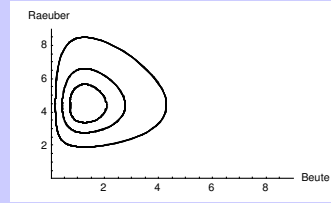
$$\frac{d}{dt}(d \ln x + a \ln y - cx - by) = 0.$$

Das bedeutet aber, dass die Funktion

$$E(x, y) = d \ln x + a \ln y - cx - by$$

auf jeder Lösungskurve der Volterra-Lotka-Gleichung konstant ist, sie ist eine sogenannte *Erhaltungsgröße* oder ein *Integral* des Systems und jede Lösungskurve verläuft innerhalb einer Niveaulinie dieser Funktion.

Man kann sich numerisch-graphisch davon überzeugen oder wirklich beweisen, dass die Niveaulinien von E geschlossene Kurven um den Gleichgewichtspunkt (\bar{x}, \bar{y}) herum sind, auf denen die Lösungen periodisch herumlaufen.



Sei $(x(t), y(t))$ eine solche Bahn mit Periode T . Dann ist wegen der Periodizität

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{x}}{x} dt = \frac{1}{T} (\ln x(T) - \ln x(0)) = 0.$$

Andrerseits folgt aus der Differentialgleichung

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{x}}{x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (a - by(t)) dt = a - b \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

Aus beidem zusammen folgt

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b} = \bar{y}$$

und mit gleichem Argument

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{d}{c} = \bar{x}.$$

Das zeitliche Mittel der Populationsgrößen ist also unabhängig von der Lösung immer $\frac{d}{c}$ bzw. $\frac{a}{b}$.

Damit haben wir wichtige Informationen über die Lösungen gewonnen, ohne diese explizit zu kennen.

Wir halten eine berühmte Folgerung daraus fest:

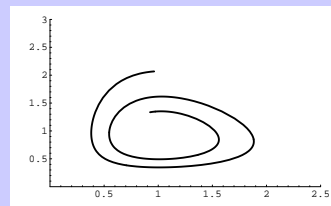
Das Volterra-Prinzip. Interpretiert man die Beute als Schädlinge, die Räuber als Nützlinge und wendet ein Gift an, das die Ausbreitung der Schädlinge aber gleichermaßen auch das der Nützlinge reduziert, so entspricht das der Addition von Termen $-\epsilon x$ bzw. $-\epsilon y$ auf der rechten Seite, d.h. a wird zu $a - \epsilon$ und d zu $d + \epsilon$, der Mittelwert d/c der Schädlinge *erhöht* sich auf $(d + \epsilon)/c$, statt sich zu reduzieren.

Für nicht-verschwindende λ, μ gibt es wieder genau eine Gleichgewichtslösung

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{bd + a\mu}{bc + \lambda\mu}, \frac{ac - d\lambda}{bc + \lambda\mu} \right),$$

aber man findet keine Erhaltungsgröße. Die Diskussion der Lösungen wird komplizierter. Mit Mathematica findet man zum Beispiel numerisch

```
a=4.4;b=1;c=.5;d=1; λ = .1; μ = .02;
lsg:=NDSolve[{
x'[t]==a x[t]-bx[t]y[t]-λ x[t]^2,
y'[t]==cx[t]y[t]-dy[t]-μ y[t]^2,
x[0]==.2;y[0]==1; } {x,y},{t,0,20}]
ParametricPlot[
Evaluate[{x[t],y[t]}/.lsg,
{t,6,20},PlotRange->{{0,2.5},{0,3}}]
```



Es sieht aus, als liefen alle Bahnen gegen das Gleichgewicht, aber es könnte z. B. auch noch eine sehr kleine geschlossene Bahn geben. Die Entscheidung darüber übersteigt den Rahmen dieser Vorlesung, aber wir kommen auf verwandte Fragen im nächsten Abschnitt zurück, vgl. Beispiel 47.

Das Auffinden der Funktion $E(x, y)$ im vorangehenden Beispiel erscheint als Zaubertrick. Bei physikalisch motivierten Differentialgleichungen kennt man aber oft aus der Physik schon Erhaltungsgrößen (Energie, Impuls), und damit hat man dann wesentliche Information über die Phasenkurven des Systems. Wir machen das an drei klassischen Beispielen aus der Mechanik deutlich. Vgl. auch die Abschnitte 12.3 und 12.4 in *Müller: Mechanik II*.

Beispiel 39 (Massenpunkt im Potentialfeld).

Müller: Mechanik II, Abschnitt 12.4

Wir betrachten das System für einen Massenpunkt der NEWTONSchen Mechanik in einer Raumdimension

$$\begin{aligned}\dot{x} &= m^{-1}p, \\ \dot{p} &= F(x).\end{aligned}\tag{42}$$

Wir nehmen an, dass $U(x)$ eine Stammfunktion von $-F(x)$ ist, und wir definieren

$$E(x, p) := U(x) + \frac{1}{2m}p^2.\tag{43}$$

Ist dann $(x(t), p(t))$ eine Lösungskurve von (42), so findet man:

$$\frac{d}{dt}E(x(t), p(t)) = \frac{\partial E}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial E}{\partial p}\dot{p}(t) = -F(x)\dot{x}(t) + \frac{1}{m}p\dot{p} = -F(x)\dot{x}(t) + \dot{x}F(x) = 0.$$

Also ist E auf den Phasenbahnen konstant. In diesem Beispiel ist U gerade das Potential des Kraftfeldes und E die Summe aus potentieller und kinetischer Energie: Wir haben den Energieerhaltungssatz bewiesen. Aber eigentlich haben wir die Definition (43) getroffen *in Kenntnis* des Energieerhaltungssatzes!

Beispiel 40 (Pendelgleichung).

Müller: Mechanik II, Abschnitt 15.2

Für die Pendelgleichung

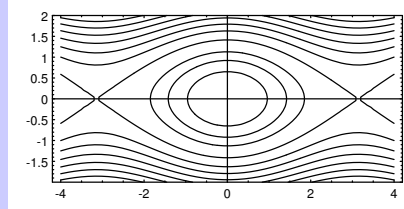
$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= L^{-1}\omega \\ \dot{\omega} &= -g \sin \phi.\end{aligned}$$

aus Beispiel 11 ist $E(\phi, \omega) = -g \cos \phi + \frac{1}{2L}\omega^2$ ein Integral, nämlich wieder die Energie des Pendels. In der Nähe von $(0, 0)$ ist

$$E(\phi, \omega) \approx -g + \frac{g}{2}\phi^2 + \frac{1}{2L}\omega^2,$$

die Kurven $E = \text{const}$ für kleine Konstante sind also ellipsenartige Kurven um $(0, 0)$. Deshalb ist $(0, 0)$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt: Bei kleiner Auslenkung bleibt das Pendel in der Nähe von $(0, 0)$, vgl. den nächsten Abschnitt über *Stabilität*. Das war physikalisch klar, folgte aber nicht aus unseren bisherigen Einsichten.

Weil die Phasenkurven in den Niveaulinien von E liegen bekommt man außerdem aus den letzteren ein komplettes Phasenporträt. Wieder sind die „Schnittpunkte“ der Phasenbahnen auf der ϕ -Achse *keine* Schnittpunkte von Phasenbahnen, sondern vielmehr selbst konstante Bahnen, instabile Gleichgewichtslagen des Pendels.



Technische Anmerkung. Damit dieses Bild überzeugt, muß das Niveau durch die instabilen Gleichgewichtspunkte sichtbar sein. Bei dem ContourPlot-Befehl von Mathematica sucht sich das Programm aber die Niveaus für den Plot selbst aus, und das fragliche ist in der Regel nicht dabei. Deshalb wurden 3 Bilder überlagert:

```
niveau[u-, v-, z-] = Contourplot[-Cos[x] + y^2,
    {x, -4, 4}, {y, -2, 2},
    AspectRatio -> Automatic,
    Contours -> z,
    ContourShading -> False,
    Axes -> True, AxesOrigin -> {0, 0},
    PlotPoints -> 50, PlotRange -> {u, v}]
Show[niveau[1, 1, 1], niveau[-1, .8, 3], niveau[1.01, 6, 5], PlotRange -> {-2, 2}]
```

Im Anhang Abschnitt 11.3 finden sie als Beispiel die Herleitung der Keplerschen Gesetze aus dem Gravitationsgesetz und den Bewegungsgleichungen von Newton. Sie dokumentiert eine der ganz großen Leistungen in der Geschichte der Naturwissenschaften und zeigt gleichzeitig sehr klar die Bedeutung von Integralen bei der Behandlung nicht explizit lösbarer dynamischer Systeme.

Fazit. Viele dynamische Systeme („die meisten“) lassen sich nicht explizit lösen, obwohl der Existenz- und Eindeigkeitssatz sicherstellt, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Information über die Eigenschaften dieser Lösung lassen sich gelegentlich direkt aus der Differentialgleichung gewinnen. Zum Beispiel liefern bekannte Erhaltungsgrößen solche Information.

Wie findet man aber Erhaltungsgrößen, wenn man sie noch nicht kennt? Was kann man tun, wenn es keine Erhaltungsgrößen gibt? Für diese Situationen gibt es keine Patentrezepte, man braucht für die konkrete Differentialgleichung konkrete Ideen.

6 Stabilität

- Gleichgewichtszustände von Systemen können auf Störung sehr unterschiedlich reagieren. Zunächst untersuchen wir, wie.
- Besonders interessieren wir uns für stabile Gleichgewichtszustände.

Vergleichen sie zu diesem Abschnitt [*Regelungstechnik I, Abschnitt 4.6*] oder [*Regelung in der Luft- und Raumfahrt, Abschnitt 6*].

In der Regelungstechnik betrachtet man Regelkreisglieder, die einem Eingangssignal x_e (der Regelabweichung) mit einem Ausgangssignal x_a (der Stellgröße) antworten. In einem mathematischen Modell ist x_a die Lösung eines Anfangswertproblems zum Beispiel mit x_e als rechter Seite. Ziel der Regelung ist der Erhalt eines bestimmten Systemzustandes, Regelabweichungen sollen korrigiert werden.

Beispiel 41.

Regelungstechnik I, Abschnitt 2.3

Wir betrachten

$$T_1 \dot{x}_a = -x_a + x_e(t), \quad x_e(t_0) = x_0.$$

Das entspricht in der Regelungstechnik einem sogenannten PT_1 -Glied. Für gegebenen Eingang x_e erhält man eine partikuläre Lösung x_a , die das Anfangswertproblem löst. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$\tilde{x}_a(t) = x_a(t) + C e^{-\frac{t-t_0}{T_1}}.$$

Störungen der Stellgröße x_a , hervorgerufen durch Schwankungen im Betrieb des Reglers, die sich in der Anfangsbedingung niederschlagen, klingen wegen des negativen Exponenten von e also im Laufe der Zeit ab. Der Regler arbeitet „stabil“. Und diese Eigenschaft hängt offenbar nicht von x_e , sondern nur vom Rest der Differentialgleichung, also vom Regler selbst ab. Es ist klar, dass Stabilität eine wünschenswerte Eigenschaft von Reglern ist.

Wir wollen deshalb die „Stabilität“ von (autonomen) dynamischen Systemen

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}) \tag{44}$$

betrachten.

Definition 42 (Gleichgewicht). Punkte $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, in denen

$$\vec{F}(\vec{x}_0) = 0,$$

heißen *Gleichgewichtspunkte* des Systems. In anderer Terminologie heißen sie auch *stationäre*, *singuläre* oder *kritische Punkte*. Offenbar ist dann

$$\vec{x}(t) \equiv \vec{x}_0$$

eine Lösung des Problems, und zwar eine konstante: das System „ruht im Gleichgewicht“.

„Stabilität“ betrifft den Verlauf der Phasenkurven in der Nähe eines solchen Gleichgewichtspunktes. Zunächst ein Beispiel.

Beispiel 43. Wir betrachten im \mathbb{R}^2 das System

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \tag{45}$$

mit einer konstanten (2×2) -Matrix A , und wir setzen voraus, dass $\det A \neq 0$. Mit λ_1 und λ_2 bezeichnen wir die Eigenwerte von A . Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- λ_1 und λ_2 sind verschieden und reell. Dann ist die allgemeine Lösung von (45) von der Form

$$c_1 e^{\lambda_1 x} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 x} \vec{v}_2$$

- $\lambda_1 = \lambda_2$ reell. Dann ist die allgemeine Lösung von (45) von der Form

$$e^{\lambda_1 x} (c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2)$$

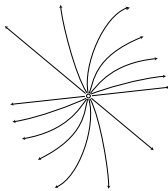
oder, falls die geometrische Vielfachheit von λ_1 kleiner als zwei ist, von der Form

$$e^{\lambda_1 x} (c_1 \vec{v}_1 + x c_2 \vec{v}_2)$$

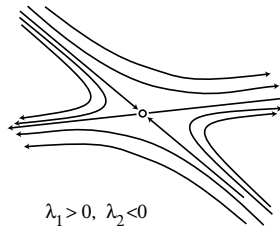
- Die Eigenwerte $\lambda_1 = \alpha + i\omega$ und $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ sind konjugiert komplex zueinander und nicht-reell. Dann ist die allgemeine Lösung von (45) von der Form

$$e^{\alpha x} \begin{pmatrix} a \cos \omega t + b \sin \omega t \\ c \cos \omega t + d \sin \omega t \end{pmatrix}$$

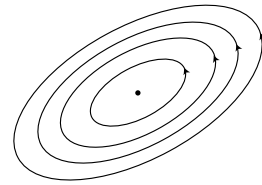
Wir skizzieren hier die Phasenporträts für verschiedene Fälle:



$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$



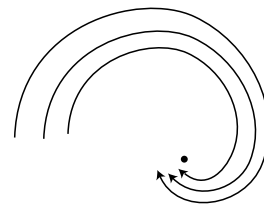
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$



λ_1, λ_2 rein imaginär

Beachten Sie, dass die Phasenkurven nicht durch 0 hindurchgehen, vielmehr ist 0 eine eigene Phasenkurve, eben die Gleichgewichtslage.

Es kann aber auch so aussehen:



λ_1, λ_2 komplex mit negativem Realteil

□

Bei diesem 2-dimensionalen System gilt also:

1. Ist der Realteil beider Eigenwerte negativ, so gehen alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ gegen 0, man sagt 0 ist ein *attraktives* Gleichgewicht.
2. Sind beide Eigenwerte rein imaginär, so bleiben Phasenkurven, die nah bei 0 starten auch nah bei 0. Man sagt 0 ist ein *stabiles* Gleichgewicht. (In unserem Fall sind die Phasenkurven sogar periodisch).
3. Hat mindestens ein Eigenwert positiven Realteil, so gibt es Lösungen, die „weglaufen“. Das Gleichgewicht ist *instabil*.

Wir werden sehen, dass diese Situation typisch ist. Zunächst müssen wir aber die Begriffe klären.

Definition 44. Wir nennen einen Gleichgewichtspunkt \vec{x}_0 eines (nicht notwendig linearen) dynamischen Systems

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$$

- *attraktiv*, wenn Lösungen, die nahe dem Gleichgewicht starten, schließlich gegen die Gleichgewichtslage konvergieren, genauer: Wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = x_0$$

für jede Lösung $\vec{x}(t)$ mit $|\vec{x}(0) - \vec{x}_0| < \delta$.

- *stabil*, wenn alle Lösungen, die nahe x_0 starten, in der Nähe des Gleichgewichts bleiben, d.h. wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|\vec{x}(t) - \vec{x}_0| < \epsilon \quad \text{für alle } t > 0,$$

für jede Lösung $\vec{x}(t)$ mit $|\vec{x}(0) - \vec{x}_0| < \delta$.

- *asymptotisch stabil*, wenn es *attraktiv + stabil* ist.
- *instabil*, wenn nicht alle Lösungen, die nahe x_0 starten, auch nahe x_0 bleiben, d.h. wenn es ein $\epsilon > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ eine Lösung $\vec{x}(t)$ und ein $t_1 > 0$ gibt, so dass

$$|\vec{x}(0) - \vec{x}_0| < \delta, \text{ aber } |\vec{x}(t_1) - \vec{x}_0| > \epsilon.$$

Damit gilt

Satz 45 (Stabilitätssatz: Linear konstanter Fall). Das Gleichgewicht 0 von

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

ist

- (i) asymptotisch stabil, falls alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben,
- (ii) stabil, falls
 - kein Eigenwert von A positiven Realteil hat und
 - für die Eigenwerte mit Realteil=0 die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen ist
- (iii) instabil, falls ein Eigenwert von A positiven Realteil hat oder ein Eigenwert mit Realteil 0 existiert, dessen geometrische Vielfachheit kleiner als seine algebraische ist.

Für den zweidimensionalen Fall folgt das direkt aus den oben aufgeschriebenen expliziten Lösungen, und der höher-dimensionale Fall geht genauso.

Wir wenden uns jetzt der Stabilität im nichtlinearen Fall zu.

Im allgemeinen kann man dann die Lösungen des Systems nicht mehr explizit hinschreiben wie bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten. Aber man kann natürlich numerisch experimentieren oder auf andere Weise sogar exakte Informationen gewinnen:

Im Pendelbeispiel 40 oder im Räuber-Beute-Modell Beispiel 38 mit $\lambda = 0 = \mu$ hatten wir bereits stabile Gleichgewichte gefunden. Und im Räuber-Beute-Modell mit sozialer Reibung lieferte die Numerik zumindest den Verdacht auf ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht.

Mit Einschränkungen läßt sich der Typ des Gleichgewichts im nichtlinearen Fall aus der linearen Approximation von \vec{F} bei \vec{x}_0 ablesen:

Satz 46 (Stabilitätssatz: Nichtlinearer Fall). Ist $\vec{F}(\vec{x}_0) = 0$ und haben die Eigenwerte der $(n \times n)$ -Matrix

$$F'(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial \vec{F}_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \right)$$

sämtlich negativen Realteil, so ist \vec{x}_0 ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht. Hat wenigstens ein Eigenwert einen positiven Realteil, so ist \vec{x}_0 ein instabiles Gleichgewicht.

Beispiel 47 (Räuber-Beute-Modell). Für das Vektorfeld aus Beispiel 38 findet man im Gleichgewichtspunkt (\bar{x}, \bar{y}) die Ableitung

$$H'(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} -\lambda\bar{x} & -b\bar{x} \\ c\bar{y} & -\mu\bar{y} \end{pmatrix}$$

und daraus die folgende Gleichung für die Eigenwerte ξ :

$$\xi^2 + (\mu\bar{y} + \lambda\bar{x})\xi + \bar{x}\bar{y}(\lambda\mu + bc) = 0.$$

Für $\lambda = \mu = 0$ hat diese Gleichung rein-imaginäre konjugiert-komplexe Nullstellen. Wir wissen zwar aus den Ergebnissen von Beispiel 38, dass das Gleichgewicht in diesem Fall stabil ist, aber das kann man im nicht-linearen Fall nicht aus $\xi_{1,2} = \pm i\sqrt{\bar{x}\bar{y}bc}$ schließen.

Falls $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, haben alle Nullstellen der quadratischen Gleichung negativen Realteil $-\frac{\mu\bar{y} + \lambda\bar{x}}{2}$. Also kann man den Satz 46 anwenden und erhält ein asymptotisch stabiles Gleichgewicht.

Beispiel 48 (Pendelgleichung).

Müller: *Mechanik II*, Abschnitt 15.2

Vgl. Beispiel 40. Die Bewegungsgleichung für das Pendel

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= L^{-1}\omega \\ \dot{\omega} &= -g \sin \phi. \end{aligned}$$

hat im (ϕ, ω) -Phasenraum die Gleichgewichtspunkte $(n\pi, 0)$, n ganzzahlig. Die Ableitungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & L^{-1} \\ -g \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \frac{g}{L} \cos \phi = 0$. Für $\phi = n\pi$ mit ungeradem n hat man also zwei reelle Eigenwerte $\pm\sqrt{\frac{g}{L}}$, von denen einer positiv ist: Das Gleichgewicht ist instabil, wie auch aus physikalischen Gründen offensichtlich ist. Für gerades n , d.h. für das Pendel in unterster Position liegt aus physikalischen Gründen ein stabiles Gleichgewicht vor, wie wir auch schon im Beispiel 40 festgestellt haben. Aber die Eigenwerte $\pm i\sqrt{\frac{g}{L}}$ haben Realteil = 0, und der vorstehende Satz macht keine Aussage.

7 Laplacetransformation

- Wir definieren die Laplacetransformation und zeigen ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Wir definieren auch eine Klasse von Funktionen, die Funktionen von exponentieller Ordnung, für die das uneigentliche Integral der Laplacetransformation immer existiert.
- Der Ableitungssatz erklärt, warum die Laplacetransformation beim Lösen linearer Differentialgleichungen helfen kann. Sie ist dadurch gleichermaßen für gewöhnliche wie partielle Differentialgleichungen von Bedeutung.
- In der Regelungstechnik und der Theorie der linearen Systeme ist sie *das* zentrale mathematische Werkzeug, hinter dem die Differentialgleichungen oft kaum noch erkennbar sind. Vergleichen Sie [Regelungstechnik I] oder [Regelung in der Luft- und Raumfahrt].

7.1 Definition und grundlegende Eigenschaften

Definition 49. Für eine Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ definiert man die LAPLACETRANSFORMATION folgendermaßen: Für $s \in \mathbb{C}$ sei

$$L[f](s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

falls das Integral existiert, d.h. falls

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} f(t)e^{-st} dt$$

existiert.

Notation: Häufig schreibt man einfacher $F(s)$ statt $L[f](s)$.

Eine einfache Konsequenz der Definition ist der

Satz 50 (Linearität). Die LAPLACETRANSFORMATION ist linear: Existieren $L[f]$ und $L[g]$, so existieren auch $L[f + g]$ und $L[af]$ für beliebiges $a \in \mathbb{C}$ und es gilt

$$\begin{aligned} L[f + g] &= L[f] + L[g], \\ L[af] &= aL[f]. \end{aligned}$$

Wir berechnen nun die LAPLACETRANSFORMATION einiger Funktionen.

Satz 51 (LAPLACETRANSFORMIERTE). Es gilt für $a \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$L[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a} \quad \text{Re } s > \text{Re } a \quad (46)$$

$$L[\sin at](s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{Re } s > |\text{Im } a| \quad (47)$$

$$L[\cos at](s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{Re } s > |\text{Im } a| \quad (48)$$

$$L[1](s) = \frac{1}{s} \quad \text{Re } s > 0 \quad (49)$$

$$L[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{Re } s > 0 \quad (50)$$

Beweis. Zu (46).

$$\begin{aligned} \int_0^\beta e^{at} e^{-st} dt &= \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\beta \\ &= \frac{1}{a-s} \left(e^{(\text{Re } a - \text{Re } s)\beta} e^{i(\text{Im } a - \text{Im } s)\beta} - 1 \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{a-s} (0 - 1) = \frac{1}{s-a}, \quad \text{falls } \text{Re } s > \text{Re } a. \end{aligned}$$

Zu (47). Aus (46) und der Linearität von \mathbf{L} folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\sin(at)](s) &= \mathbf{L}\left[\frac{1}{2i}(e^{iat} - e^{-iat})\right](s) \\ &= \frac{1}{2i} (\mathbf{L}[e^{iat}](s) - \mathbf{L}[e^{-iat}](s)) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \frac{2ia}{s^2 + a^2} \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Zu (48). Analog.

Zu (49). Folgt aus (48) mit $a = 0$.

Zu (50). Mit vollständiger Induktion. Den Fall $t^0 = 1$ haben wir gerade erledigt. Zum Induktionsschritt beachte, dass mit partieller Integration für $n > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^\beta t^n e^{-st} dt &= \left[t^n \frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^\beta + \frac{n}{s} \int_0^\beta t^{n-1} e^{-st} dt \\ &= \frac{-\beta^n}{se^{s\beta}} + \frac{n}{s} \int_0^\beta t^{n-1} e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Für $\beta \rightarrow \infty$ geht der erste Summand gegen 0, der zweite gegen $\frac{n}{s}\mathbf{L}[t^{n-1}](s)$, also ist

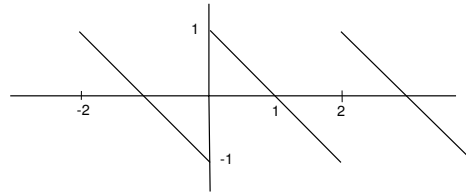
$$\mathbf{L}[t^n](s) = \frac{n}{s}\mathbf{L}[t^{n-1}](s).$$

Das vollendet den Induktionsschritt. \square

Jetzt wollen wir auf die Frage nach der Existenz der LAPLACETRANSFORMIERTEN eine einfache Antwort geben. Dazu müssen wir zwei Dinge sicherstellen:

1. Für alle $\beta > 0$ muß $\int_0^\beta f(t)e^{-zt} dt$ existieren.

Das ist der Fall, wenn $f(t)$ auf jedem endlichen Intervall beschränkt und stückweise stetig ist, d.h. nur endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Beispiele liefern natürlich die stetigen Funktionen $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, aber auch die nebenstehende „Sägezahnfunktionen“.



2. Der Grenzwert

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^\beta f(t)e^{-st} dt,$$

muß existieren und das heißt, der Integrand muß ausreichend schnell gegen 0 gehen. Nun ist mit $s = x + iy$

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot \underbrace{|e^{-ity}|}_{=1}.$$

Je größer x ist, um so schneller fällt e^{-xt} und umso mehr Wachstum kann sich $f(t)$ „erlauben“. Aber natürlich darf $f(t)$ nicht schneller wachsen, als es die Exponentialfunktion kompensieren kann. Das führt zu folgender

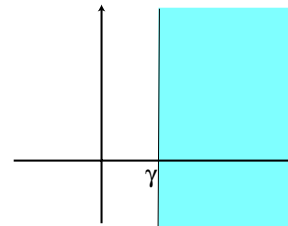
Definition 52. Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion

1. $f(t)$ heißt stückweise stetig, wenn es in jedem *endlichen* Intervall nur *endlich viele* Unstetigkeitsstellen besitzt.
2. $f(t)$ heißt *von exponentieller Ordnung*, wenn es Konstanten C und γ gibt, so dass für alle $t \geq 0$

$$|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}.$$

Beispiel 53. Die Funktionen t^n , e^{at} oder $t^n e^{at}$ für komplexes a sind von exponentieller Ordnung. Damit sind alle Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten von exponentieller Ordnung. Die Funktion $f(t) = e^{t^2}$ ist nicht von exponentieller Ordnung, aber es ist kaum denkbar, dass Sie ernsthaft mit ihr zu tun bekommen. \square

Unter den jetzt diskutierten Voraussetzungen existiert die LAPLACETRANSFORMATION vielleicht nicht für alle Werte von s , aber doch für alle Werte mit hinreichend großem Realteil, also rechts von einer Geraden $x = \gamma$ in der komplexen Ebene:



Satz 54 (Funktionen von exponentieller Ordnung). Sei $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ von exponentieller Ordnung und stückweise stetig. Dann gibt es ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $L[f](s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > \gamma$ existiert.

Weiter gilt für reelles x

$$\lim_{x \rightarrow \infty} L[f](x) = 0. \quad (51)$$

Beweis. Die Existenz der endlichen Integrale ist nach den gemachten Voraussetzungen klar. Seien nun C und γ wie in der Definition. Dann ist

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)e^{-xt}| \leq Ce^{\gamma t}e^{-xt} = Ce^{(\gamma-x)t}.$$

Wenn $x > \gamma$, geht dies für $t \rightarrow \infty$ exponentiell schnell gegen null, und es existiert das uneigentliche Integral. Weiter gilt

$$\left| \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^\infty Ce^{(\gamma-x)t} dt = \frac{C}{\gamma-x} e^{(\gamma-x)t} \Big|_0^\infty = \frac{C}{x-\gamma} \rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \infty.$$

□

Wenn f von exponentieller Ordnung ist, erhält man für $t \geq 0$

$$|tf(t)| \leq tCe^{\gamma t} \leq e^t Ce^{\gamma t} = Ce^{(\gamma+1)t}.$$

Also ist auch $tf(t)$ von exponentieller Ordnung. Man erhält den

Satz 55 (Multiplikationssatz). *Es gilt*

$$L[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}L[f](s).$$

Beweis.

$$L[tf(t)](s) = \int_0^\infty f(t)te^{-st} dt = -\int_0^\infty f(t)\frac{\partial}{\partial s}e^{-st} dt = -\frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = -\frac{d}{ds}L[f](s).$$

□

Generalvoraussetzung: Einstweilen setzen wir voraus, dass alle betrachteten Funktionen von exponentieller Ordnung und stückweise stetig sind. Die Gleichungen für die LAPLACETRANSFORMIERTEN gelten für hinreichend großen Realteil von s , ohne dass wir das immer wieder anmerken.

Wir kommen nun zur Schlüssel-Eigenschaft der LAPLACETRANSFORMATION in Bezug auf Differentialgleichungen. Die Ableitung von f nach der Zeit bezeichnen wir dabei mit f' statt mit \dot{f} , weil das bei den höheren Ableitungen bequemer zu notieren ist.

Satz 56 (Ableitungssatz). *Erfüllen $f(t)$ und $f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ die Generalvoraussetzung, so gilt*

$$L[f'](s) = sL[f](s) - f(0)$$

und allgemeiner

$$L[f^{(n)}](s) = s^n L[f](s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Bis auf die additive Konstante $-f(0)$ entspricht der *Differentiation* von f also die *Multiplikation* von $F(s) = L[f](s)$ mit s . Differentialgleichungen werden damit zu algebraischen Gleichungen.

Beweis. Es ist

$$\int_0^\beta f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^\beta - \int_0^\beta f(t)(-s)e^{-st} dt = f(\beta)e^{-s\beta} - f(0) + s \int_0^\beta f(t)e^{-st} dt.$$

Weil f und f' die Generalvoraussetzung erfüllen, folgt

$$\mathbf{L}[f'](s) = 0 - f(0) + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = s\mathbf{L}[f](s) - f(0).$$

Die allgemeine Behauptung folgt daraus durch vollständige Induktion. \square

Satz 57 (Dämpfungssatz). Für komplexes a gilt

$$\mathbf{L}[e^{at}f](s) = \mathbf{L}[f](s - a).$$

Beweis.

$$\mathbf{L}[e^{at}f](s) = \int_0^{\infty} e^{at}f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t} dt = \mathbf{L}[f](s - a).$$

\square

7.2 Anwendungen der Laplacetransformation

- Wir behandeln Anwendungen der Laplacetransformation auf auf verschiedene Differentialgleichungsprobleme.

Beispiel 58. Löse das Anfangswertproblem

$$y'' - 6y' + 9y = t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Wir wenden auf die Differentialgleichung die LAPLACETRANSFORMATION an. Dabei benutzen wir die Linearität und den Ableitungssatz. Wir schreiben zur Vereinfachung

$$Y := \mathbb{L}[y(t)](s)$$

und erhalten

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) - 6(sY - y(0)) + 9Y = \frac{1}{s^2}.$$

Einsetzen der Anfangswerte und Auflösen nach Y liefert

$$Y = \frac{1}{s^2(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Partialbruchzerlegung des ersten Terms der rechten Seite mit dem Ansatz

$$\frac{1}{s^2(s-3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{(s-3)^2}$$

liefert

$$Y = \frac{2/27}{s} + \frac{1/9}{s^2} + \frac{-2/27}{s-3} + \frac{1/9}{(s-3)^2} + \frac{1}{(s-3)^2}.$$

Die Rücktransformation ergibt

$$y = \frac{2}{27} + \frac{1}{9}t - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{1}{9}te^{3t} + te^{3t} = \frac{2}{27} + \frac{1}{9}t + \left(-\frac{2}{27} + \frac{10}{9}t\right)e^{3t}.$$

□

Natürlich kann man das vorstehende Problem auch mit Exponentialansatz und Ansatz vom Typ der rechten Seite lösen. Einen Vergleich beider Methoden finden Sie im Anhang. Er ergibt einen kleinen Vorteil für die LAPLACETRANSFORMATION, aber Computer schaffen das natürlich noch einfacher:

$$\text{DSolve}\{\{y''[t]-6y'[t]+9y[t]==t,y[0]==0,y'[0]==1\},y,t\}$$
$$\{\{y - > \left(\left(\frac{1}{9} + \frac{10e^{3\#1}}{9}\right)\#1 - \frac{2e^{3\#1}}{27} + \frac{2}{27}\&\right)\}\}$$

Daraus ersehen wir, dass die Bedeutung der LAPLACETRANSFORMATION heute sicher nicht mehr in der Lösungspraxis für lineare Differentialgleichungen wie die obige liegt. Ihre Bedeutung hat andere Gründe.

- In der Regelungstechnik und Netzwerktheorie spart man sich die Transformiererei, indem man einfach in den s -Bereich „umzieht“. Systemkomponenten werden einfach durch ihre Wirkung im transformierten Bereich (Bildbereich) beschrieben, und diese Wirkung ist dort eben einfach algebraisch.
- Die LAPLACETRANSFORMATION ist ideal für die Behandlung von inhomogenen linearen Differentialgleichungen mit *unstetiger* rechter Seite (Impulse, Stoß- oder Schockphänomene).

- Bei partiellen Differentialgleichungen, hat man es mit den Ableitungen nach mehreren Variablen zu tun. Durch Anwendung der LAPLACETRANSFORMATION auf eine Variable kann man gelegentlich die Variablenzahl drücken und das Problem vereinfachen.

Wir kommen auf alle diese Punkte zurück. Zuvor müssen wir allerdings noch einen Punkt aus der Lösung der Beispielaufgabe klären, nämlich die Frage nach der „Rücktransformation“. Wir haben Y berechnet und dann eine Funktion y angegeben, für die $\mathbb{L}[y] = Y$ ist. Dabei haben wir unterstellt, dass es nur *eine* solche Funktion y gibt, dass also die LAPLACETRANSFORMATION injektiv ist. Zum Glück ist das so:

Satz 59 (Eindeutigkeitssatz von Lerch). Wenn f und g unsere Generalvoraussetzung erfüllen und wenn

$$\mathbb{L}[f](s) = \mathbb{L}[g](s)$$

für alle s mit hinreichend großem Realteil, dann ist

$$f(t) = g(t)$$

in allen Punkten t , in denen beide Funktionen stetig sind.

Auf den Beweis verzichten wir hier, die Bedeutung des Satzes sollte oben deutlich geworden sein.

Bemerkung zur Rücktransformation rationaler Funktionen. Beim Beispiel 58 war das Hauptproblem die Rücktransformation einer gebrochen-rationalen Funktion $F(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ mit Polynomen $p(s)$ und $q(s)$. Das ist in diesem Zusammenhang ein typisches Problem. Aus $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$, vgl. Satz 54, folgt, dass der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad, und daher ist $F(s)$ nach Partialbruchzerlegung eine Summe von Termen der Form

$$\frac{a}{(s - s_i)^k}.$$

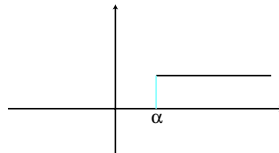
Dabei sind die s_i die Nullstellen von $q(s)$, und wenn m_i die Ordnung von s_i bezeichnet, ist $1 \leq k \leq m_i$. Wegen

$$\mathbb{L} \left[\frac{a}{(k-1)!} e^{s_i t} t^{k-1} \right] = \frac{a}{(s - s_i)^k}$$

ist damit das Problem der Rücktransformation von gebrochen-rationalen Funktionen erledigt, sobald man die Partialbruchzerlegung hat. Schon die Nullstellen des Nenners allein geben wichtige qualitative Information: Wegen $e^{s_i t} = e^{x_i t} (\cos y_i t + i \sin y_i t)$ bestimmen der Realteil x_i das Stabilitäts- und der Imaginärteil y_i das Frequenzverhalten der Lösung.

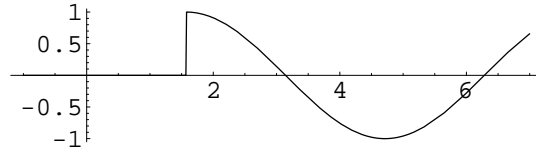
Unstetige rechte Seite. Ein weiteres wichtiges Anwendungsfeld sind lineare Differentialgleichungen mit unstetiger rechter Seite. Dazu betrachten wir die *Sprungfunktion* oder *Heavisidefunktion*

$$u_\tau(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq \tau, \\ 1 & \text{für } t > \tau. \end{cases}$$



mit positivem τ . Sie ist ideal, um die rechte Seite einer Differentialgleichung erst zum Zeitpunkt τ „einzuschalten“.

So sieht zum Beispiel $u_{\pi/2}(t) \cos(t - \pi/2)$ aus:



Satz 60 (Verschiebungssatz). Ist $g(t)$ stückweise stetig und von exponentieller Ordnung, so gilt

$$L[u_{\tau}(t)g(t - \tau)](s) = e^{-\tau s} L[g(t)](s).$$

Beweis. Es gilt

$$L[u_{\tau}(t)g(t - \tau)](s) = \int_0^{\infty} u_{\tau}(t)e^{-st}g(t - \tau)dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-st}g(t - \tau)dt,$$

und daraus folgt mit der Substitutionsregel

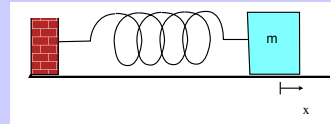
$$L[u_{\tau}(t)g(t - \tau)](s) = \int_0^{\infty} e^{-s(t+\tau)}g(t)dt = e^{-\tau s} \int_0^{\infty} e^{-st}g(t)dt = e^{-\tau s} L[g(t)](s).$$

□

Beispiel 61. Die Differentialgleichung

$$mx'' + ax' + bx = h(t) \tag{52}$$

kann man interpretieren als Gleichung für die gedämpfte Schwingung einer Masse m an einer Feder mit Federkonstante b und der „Zwangskraft“ $h(t)$. Wir nehmen an, dass $a > 0$ und $a^2 - 4bm < 0$. Dann hat die zugehörige homogene Gleichung die allgemeine Lösung



$$x(t) = e^{-at/2m}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad \omega^2 = \frac{b}{m} - \frac{a^2}{4m^2}.$$

Mit dem üblichen Trick kann man das auch schreiben als

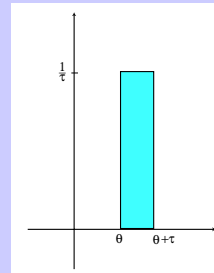
$$x(t) = Ae^{-at/2m} \cos \omega(t - t_0)$$

und sieht ganz deutlich, dass man eine gedämpfte harmonische Schwingung erhält. Anfangsamplitude A und Phase t_0 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen.

Aufgabe: Wie sieht die Bewegung mit Anfangsbedingungen $x(0) = x'(0) = 0$ aus, wenn die Zwangskraft $h(t)$ ein sehr kurzer Impuls (Fußtritt) zum Zeitpunkt $\theta \geq 0$ ist:

$$h_{\theta, \tau}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{für } \theta \leq t \leq \theta + \tau, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit sehr kleinem $\tau > 0$.



Wir benutzen die LAPLACETRANSFORMATION. Es ist

$$\mathbb{L}[h_{\theta,\tau}](s) = \frac{1}{\tau} \int_{\theta}^{\theta+\tau} e^{-st} dt = \frac{1}{-s\tau} e^{-st} \Big|_{\theta}^{\theta+\tau} = e^{-s\theta} \frac{1 - e^{-s\tau}}{s\tau}.$$

Für $\tau \searrow 0$ geht der Quotient nach der Regel von Bernoulli-l'Hospital gegen 1:

$$\lim_{\tau \searrow 0} \mathbb{L}[h_{\theta,\tau}](s) = e^{-s\theta}.$$

Wir haben

$$\lim_{\tau \searrow 0} h_{\theta,\tau}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq \theta \\ \infty & \text{für } t = \theta. \end{cases}$$

Der ganz in θ konzentrierte Impuls ist also keine richtige mathematische Funktion mehr. Trotzdem versteht man ihn mit dem Symbol $\delta_{\theta}(t)$ und nennt

$\delta_{\theta}(t)$ die in θ zentrierte *Diracfunktion*

nach dem englischen Physiker P. A. Dirac (1902-1984), der zuerst solche „verallgemeinerten“ Funktionen untersucht hat. Es ist also

$$\boxed{\mathbb{L}[\delta_{\theta}] = e^{-s\theta} \text{ und insbesondere } \mathbb{L}[\delta_0] = 1.}$$

Zurück zu unserem Problem: Löse die Schwingungsgleichung (52) für einen Einheitsimpuls

$$h(t) = \delta_{\theta}(t).$$

Wir schreiben $ms^2 + as + b = m((s + \frac{a}{2m})^2 + \omega^2)$. Anwendung der Laplacetransformation liefert wegen $x(0) = x'(0) = 0$

$$\begin{aligned} X(s) &= e^{-s\theta} \frac{1}{(ms^2 + as + b)} & (53) \\ &= e^{-s\theta} \frac{1}{m\omega} \frac{\omega}{(s + \frac{a}{2m})^2 + \omega^2} \\ &= e^{-s\theta} \frac{1}{m\omega} \mathbb{L}[e^{-at/2m} \sin \omega t](s) \\ &= \mathbb{L} \left[\frac{1}{m\omega} u_{\theta}(t) e^{-a(t-\theta)/2m} \sin \omega(t-\theta) \right] (s) \end{aligned}$$

Dabei haben wir zum Schluß den Verschiebungssatz benutzt.

Also erhalten wir

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} u_{\theta}(t) e^{-a(t-\theta)/2m} \sin \omega(t-\theta). \quad (54)$$

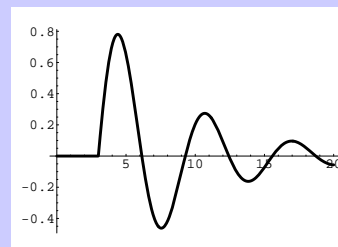
Das sieht dann so aus:

$\theta = 3$; $a = 1$; $\omega = 1$; $m = 3$;

$x[t_] := \text{If}[t < \theta, 0, \text{Exp}[-a(t - \theta)/(2m)] \text{Sin}[\omega(t - \theta)]]$

$\text{Plot}[x[t], \{t, 0, 20\}, \text{AspectRatio} \rightarrow .7,$

$\text{PlotStyle} \rightarrow \text{Thickness}[0.01]]$



Das in diesem Beispiel beschriebene Problem läßt sich mit den „normalen“ Methoden nicht lösen, ja es läßt sich gar nicht richtig formulieren, weil eben die *Diracfunktionen* gar keine Funktionen sind. Ihre LAPLACETRANSFORMIERTEN sind hingegen über jeden Zweifel erhaben, und

deshalb ist die LAPLACEfunktion das ideale Werkzeug für solche „Schockprobleme“.

Die charakteristische Eigenschaft der Diracfunktion. Wir kommen noch einmal auf die Diracfunktion zurück. Ist $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\lim_{\tau \searrow 0} \int_0^{+\infty} h_{\theta, \tau}(t) f(t) dt = \lim_{\tau \searrow 0} \underbrace{\frac{1}{\tau} \int_{\theta}^{\theta + \tau} f(t) dt}_{\text{Mittelwert von } f \text{ auf } [\theta, \theta + \tau]} = f(\theta),$$

Wir schreiben das als $\int_0^{+\infty} \delta_{\theta}(t) f(t) dt = f(\theta)$ und wollen diese Gleichung noch etwas umformulieren. Wegen $\delta_{\theta}(t) = \delta_0(\theta - t) =: \delta(\theta - t)$ gilt

$$\int_0^{+\infty} \delta(\theta - t) f(t) dt = f(\theta).$$

Setzt man $f(t) = 0$ für $t < 0$, so ergibt sich, wenn wir noch die Rollen von t und θ vertauschen

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \theta) f(\theta) d\theta = f(t).} \quad (55)$$

Definition 62. Die Faltung $f * g$ zweier Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \theta) g(\theta) d\theta, \quad t \in \mathbb{R},$$

falls dies Integral existiert.

Ist $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$, oder sind f und g nur auf $[0, +\infty[$ definiert und setzt man sie für negative Werte mit 0 fort, so hat man

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \theta) g(\theta) d\theta = \int_0^t f(t - \theta) g(\theta) d\theta.$$

Beispiel 63. Nach (55) ist also

$$\delta * f = f. \quad (56)$$

□

Satz 64 (Faltungssatz). Seien $f(t), g(t)$ stückweise stetig von exponentieller Ordnung. Dann gilt

$$L[f * g] = L[f]L[g].$$

Wegen der Injektivität der LAPLACETRANSFORMATION folgt

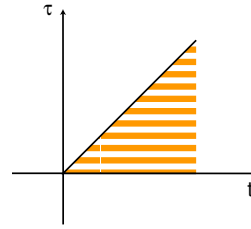
Korollar 65.

$$f * g = g * f. \quad (57)$$

Beweis des Faltungssatzes.

$$\begin{aligned} L \left[\int_0^t f(t - \theta) g(\theta) d\theta \right] &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(t - \theta) g(\theta) d\theta \right) e^{-st} dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^t e^{-st} f(t - \theta) g(\theta) d\theta dt \\ &= \int_{\theta=0}^{\infty} \int_{t=\theta}^{\infty} e^{-st} f(t - \theta) g(\theta) dt d\theta. \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt vergleiche die nebenstehende Skizze. Wir nehmen ohne Beweis an, dass diese Vertauschung der Integrationsreihenfolge erlaubt ist.



Nun können wir die Rechnung mit der Substitution $t - \theta = x$ fortsetzen:

$$\begin{aligned} \int_{\theta=0}^{\infty} \int_{t=\theta}^{\infty} e^{-st} f(t-\theta) g(\theta) dt d\theta &= \int_{\theta=0}^{\infty} g(\theta) \int_{x=0}^{\infty} e^{-s(x+\theta)} f(x) dx d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\infty} g(\theta) e^{-s\theta} d\theta \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= \mathbf{L}[f] \mathbf{L}[g]. \end{aligned}$$

□

Beispiel 66 (Greensche Funktion). Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y &= h(t) \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{58}$$

mit konstanten Koeffizienten und einer stückweise stetigen Funktion h von exponentieller Ordnung.

Die LAPLACETRANSFORMATION liefert mit $Y := \mathbf{L}[y]$ usw.

$$Y = \underbrace{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n)^{-1}}_{=: G(s)} H.$$

Findet man also ein $g(t)$, so dass

$$\mathbf{L}[g] = G(s),$$

so folgt aus dem Faltungssatz

$$y(t) = g * h(t) = \int_0^t g(t-\theta) h(\theta) d\theta.$$

Die Funktion $g(t-\theta) =: K(t, \theta)$ heißt auch die *GREENSche Funktion* für das Anfangswertproblem. Hat man sie einmal gefunden, so ist die Lösung von (66) für verschiedene rechte Seiten auf eine Integration reduziert. □

8 Partielle Differentialgleichungen

Die partiellen Differentialgleichungen bilden ein sehr umfang- und anwendungsreiches Kapitel der Mathematik. Eine halbwegs systematische Theorie gibt es eigentlich nur für spezielle Klassen oder Typen von Differentialgleichungen, und selbst bei Beschränkung auf einen Typ würde damit der Rahmen dieser Vorlesung bei weitem gesprengt.

Aufgrund der theoretischen Komplexität ist die unspezifizierte direkte Behandlung partieller Differentialgleichungen mit mathematischer Software so gut wie unmöglich. Die meisten PD-Probleme lassen sich nur numerisch behandeln. Die Auswahl der richtigen numerischen Verfahren und deren Anwendung erfordern Kenntnis und Erfahrung. Glücklicherweise treten je nach Anwendungsgebiet spezielle Typen partieller Differentialgleichungen auf, so dass solche Erfahrung sich bei Mathematikern und Ingenieuren im jeweiligen Bereich ausbilden und sammeln kann.

Wir beschränken uns daher darauf, zunächst an der Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \Delta \theta,} \quad (59)$$

gelegentlich auch an der Wellen- oder Schwingungsgleichung

$$\boxed{\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad (60)$$

einige fundamentale Methoden und Phänomene aus dem Bereich der partiellen Differentialgleichungen zu erläutern.

Für eine umfangreichere Behandlung von weiteren Einzelbeispielen vergleiche man etwa

Meyberg/Vachenauer, Höhere Mathematik 2, Springer 1991, Kapitel 12.

8.1 Separation und Superposition, Anfangswertprobleme

- Wir lernen ein auf EULER und BERNOULLI zurückgehendes Verfahren zum Auffinden von Lösungen, den sogenannten *Separationsansatz* kennen,
- sammeln Informationen über die Menge aller Lösungen und
- untersuchen, welche zusätzlichen Daten eine Lösung eindeutig festlegen.

Vergleichen Sie *Energie-, Impuls- und Stofftransport, Abschnitt 2.3.5*.

Im folgenden schreiben wir, wie vielfach in den Anwendungen üblich, die partiellen Ableitungen vereinfachend als unteren Index.

Spezialisierung. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf *eine* Raumdimension, haben also die Gleichung

$$\theta_t = D\theta_{xx} \tag{61}$$

für eine gesuchte Funktion $\theta = \theta(x, t)$.⁴

Offenbar können wir uns auf die Gleichung

$$\theta_t = \theta_{xx} \tag{62}$$

beschränken, denn man rechnet sofort nach, dass für $\hat{\theta}(x, t) = \theta(\frac{x}{\sqrt{D}}, t)$ gilt:

$$\theta_t = \theta_{xx} \iff \hat{\theta}_t = D\hat{\theta}_{xx}.$$

Der Separationsansatz. Wir nehmen an, dass θ ein Produkt von Funktionen von jeweils nur einer Variablen, also von folgender Form ist:

$$\boxed{\theta(x, t) = X(x)T(t)}. \tag{63}$$

Diese Annahme oder dieser *Ansatz* ist eigentlich nur dadurch motiviert, dass er erfolgreich ist, nämlich Lösungen liefert. Es ist nicht wahr, dass er alle Lösungen liefert, es gibt auch Lösungen (vgl. unten), die sich keineswegs in der Form (63) schreiben lassen.

Bei drei Raumvariablen macht man entsprechend den Ansatz $\theta(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$.

Wir setzen den Ansatz in die Differentialgleichung (62) ein:

$$X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t).$$

Wir nehmen weiter an, dass θ keine Nullstelle hat, und dividieren durch $\theta = XT$. Wir erhalten

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Nun sind die Variablen separiert (=getrennt): die linke Seite hängt nur von t , die rechte nur von x ab. Ändert man t , so bleibt die rechte Seite und deshalb auch die linke Seite konstant.

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \mu = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

⁴Das entspricht physikalisch zum Beispiel der Wärmeleitung in einem Stab, oder im Raum um eine (unendlich ausgedehnte) Platte in der yz -Ebene, wenn man Homogenität parallel zu der Platte annimmt, so dass von den räumlichen Koordinaten nur der Abstand von der Platte eine Rolle spielt.

mit einer Konstanten μ , die einstweilen eine beliebige reelle Zahl sein kann (*Separationskonstante*). Wir erhalten zwei *gewöhnliche* Differentialgleichungen

$$\dot{T} = \mu T.$$

und

$$X'' = \mu X.$$

Die erste hat Lösungen $T(t) = A e^{\mu t}$. Wir betrachten zunächst ein *Abkühlungsproblem*, stellen uns also vor, dass die Wärme sich in dem (unendlichen) Medium verteilt und die Temperatur an einem festen Punkte mit der Zeit abnimmt. Daher nehmen wir an, dass

$$\mu = -\nu^2, \quad \nu \in \mathbb{R},$$

negativ ist. Wir finden

$$T(t) = C e^{-\nu^2 t}.$$

Die zweite Gleichung $X'' = -\nu^2 X$ hat Lösungen

$$X(x) = A \cos \nu x + B \sin \nu x, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

und unser Ansatz liefert

$$\theta(x, t) = e^{-\nu^2 t} (A \cos \nu x + B \sin \nu x)$$

mit beliebigen $A, B \in \mathbb{R}$.

Da wir nicht wissen, ob es überhaupt Lösungen (ohne Nullstellen) der Form (63) gibt, ist nicht klar, ob unsere Überlegungen inhaltlich irgendeinen Sinn haben und ob das gefundene θ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Aber eine Probe (Differenzieren!) zeigt, dass wir tatsächlich (für alle A, B und ν) eine Lösung gefunden haben.

Wenn wir von dem physikalischen Problem ausgehen, die zeitliche Wärmeentwicklung in einem beidseitig unendlich ausgedehnten eindimensionalen Wärmeleiter zu beschreiben, sind wir mit dieser Lösung allerdings sicher noch nicht am Ziel. So hat die Lösung zur Zeit $t = 0$ eine räumlich periodische Cosinusverteilung, die mit der realen Situation zur Zeit $t = 0$ vielleicht gar nichts zu tun hat. Darüber gleich mehr.

Die *Wellengleichung* (60) läßt sich auf dieselbe Weise separieren. In diesem Fall erhalten wir bei passender Wahl der Separationskonstanten auch in der Zeitkomponente eine harmonische Schwingung.

Superposition. Die Wärmeleitungsgleichung wie die Wellengleichung sind offenbar *homogene* lineare Differentialgleichungen, und deshalb sind Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen, es gilt das *Superpositionsprinzip*. Für verschiedene Werte von ν sind die gefundenen Lösungen

$$e^{-\nu^2 t} \cos \nu x \quad \text{und/oder} \quad e^{-\nu^2 t} \sin \nu x$$

linear unabhängig.

Im Gegensatz zu den linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen ist hier also der Lösungsraum offenbar unendlich-dimensional!

Dieser Umstand macht die Theorie der partiellen Differentialgleichung viel schwieriger als die der gewöhnlichen.

Linearkombinationen

$$\theta(x, t) = \sum_{k=0}^K e^{-\nu_k^2 t} (A_k \cos \nu_k x + B_k \sin \nu_k x)$$

sind wieder Lösungen von (62), aber auch unendliche Linearkombinationen

$$\theta(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\nu_k^2 t} (A_k \cos \nu_k x + B_k \sin \nu_k x) \quad (64)$$

liefern Lösungen, wenn sie eine differenzierbare Funktion darstellen. Für $t = 0$ findet man die *Anfangsbedingung*

$$\theta(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \nu_k x + B_k \sin \nu_k x.$$

Man kann also zum Beispiel zu einer vorgegebenen T -periodischen Anfangsbedingung $\theta(x, 0)$ durch *FOURIERentwicklung* mit $\nu_k = k \frac{2\pi}{T}$ die Koeffizienten A_k, B_k bestimmen und so eine Lösung des Anfangswertproblems finden. Periodische Anfangsbedingungen sind allerdings eher unwahrscheinlich, aber dieselbe Methode kommt bei Randwertproblemen in beschränkten Bereichen zum Tragen. Für nicht-periodische Anfangswerte muß man den Begriff der Linearkombination noch allgemeiner fassen: Man kann das Summenzeichen durch eine kontinuierliche Integration ersetzen⁵: Auch

$$\theta(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\nu) e^{-\nu^2 t} \cos(\nu x) d\nu$$

liefert bei guter Konvergenz eine Lösung. Das gilt insbesondere für

$$\tilde{\theta}(x, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^2 t} \cos(\nu x) d\nu, \quad t > 0.$$

Dieses Integral kann man überraschenderweise explizit auswerten. Die dazu erforderliche etwas trickreiche Überlegung wollen wir hier vormachen, weil sie wesentlich ist für die Verbindung zwischen dem Separationsansatz und anderen Lösungsmethoden.

Wir berechnen

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\theta}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^2 t} (-\nu) \sin(\nu x) d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2t} \frac{\partial e^{-\nu^2 t}}{\partial \nu} \sin(\nu x) d\nu.$$

Darauf wenden wir partielle Integration an:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\theta}(x, t) = \frac{1}{2t} \underbrace{e^{-\nu^2 t} \sin(\nu x) \Big|_{\nu=-\infty}^{\nu=\infty}}_{=0} - \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^2 t} x \cos(\nu x) d\nu = \frac{x}{2t} \tilde{\theta}(x, t).$$

Betrachten wir für festes $t > 0$ die Funktion $y(x) := \tilde{\theta}(x, t)$, so erfüllt diese also die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{x}{2t} y.$$

Deren Lösungen sind aber leicht zu erraten:

$$\tilde{\theta}(x, t) = y(x) = C(t) e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Den Faktor $C(t)$ bestimmen wir, indem wir die Definition von $\tilde{\theta}$ ansehen und $x = 0$ setzen:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu^2 t} d\nu = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}}.$$

(Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$ wird im Modul *Analysis II für Ing.* ausgerechnet.)

⁵In den weiteren Überlegungen geht es nicht darum, alle Lösungen zu finden. Deshalb beschränken wir uns auf Cosinusterme.

Wir erhalten durch Superposition von „Separationslösungen“ also eine Lösung

$$\tilde{\theta}(x, t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad t > 0. \quad (65)$$

die sehr anders als die typische Separationslösung

$$\theta_{sep}(x, t) = e^{-\nu^2 t} \cos(\nu x) \quad (66)$$

aussieht und ganz gewiß nicht mehr von der Form $X(x)T(t)$ ist.

Die Anfangsbedingung $\theta_{sep}(x, 0)$ war eine etwas exotisch erscheinende räumliche Cosinus-Verteilung. Die Anfangsbedingung $\tilde{\theta}(x, 0)$ hingegen macht zunächst gar keinen Sinn: Wir brauchten $t > 0$.

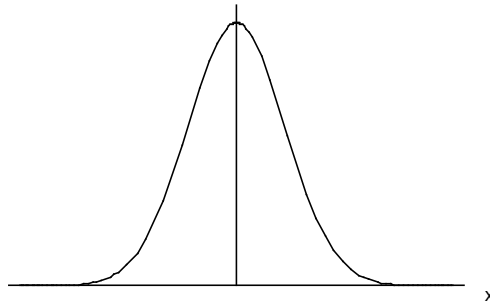
Grundlösung der Wärmeleitungsgleichung. Mit der Regel von de l'Hospital findet man für die obige Lösung $\tilde{\theta}$

$$\lim_{t \searrow 0} \tilde{\theta}(x, t) = 0, \quad x \neq 0.$$

Offenbar ist also zur Zeit $t = 0$ die ganze Wärme in $x = 0$ konzentriert. Das untersuchen wir genauer für die etwas unnormierte Lösung $\theta = \frac{1}{2\pi} \tilde{\theta}$:

$$\theta(x, t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \quad (67)$$

Für festes positives t ist der Graph dieser Funktion von x eine Gaußsche Fehlerkurve



mit Gesamtintegral = 1, deshalb die Umnormierung. Für $t \searrow 0$ konzentriert sich der Buckel im Punkt 0, so dass man die Lösung (67) als die Temperaturverteilung interpretieren kann, bei der eine Wärmeeinheit zur Zeit $t = 0$ im Punkt $x = 0$ konzentriert ist, während in allen übrigen Punkten $\theta = 0$ ist.

Eine solche „Funktion“, die überall = 0 und nur in 0 so groß ist, dass das Integral = 1 ergibt, ist keine Funktion im strengen Sinne, sondern eine sogenannte *verallgemeinerte Funktion*. Man nennt sie die *Diracsche Deltafunktion*.

Die anfangs in 0 zentrierte Lösung (67) heißt die *Grundlösung* oder *Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung*.

Allgemeines Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung. Wie sieht die Temperaturentwicklung für eine vorgegebene Verteilung

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x)$$

aus? Für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$$

ebenfalls eine Lösung von (62), die in ξ konzentrierte Grundlösung (Nachrechnen!). Durch Superposition dieser Grundlösungen mit Gewichtung θ_0 erhält man die Lösung des eben formulierten Anfangswertproblems: Die Funktion

$$\theta(x, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_0(\xi) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} d\xi$$

ist offenbar wieder eine Lösung (Differentiation unter den Integral) und man kann zeigen (mühsam), dass

$$\lim_{t \searrow 0} \theta(x, t) = \theta_0(x).$$

Zusammenfassung. Wir haben gesehen:

- Der Separationsansatz liefert viele aber keineswegs alle Lösungen der Wärmeleitungsgleichung. Genauer erhält man unendlich viele linear unabhängige Lösungen.
- Durch Superposition von Separationslösungen erhält man weitere (und in gewissem Sinne sogar alle) Lösungen.
- Betrachtet man das Problem der Wärmeleitung in einem beidseitig unendlich langen Stab oder auch in einem dreidimensionalen allseits unbeschränkten Medium, so scheint es physikalisch plausibel, dass man eine (ziemlich willkürliche) Anfangsverteilung der Temperatur vorgeben kann und dann eine eindeutig bestimmte Lösung erhält. Betrachtet man hingegen die Temperaturentwicklung in einem kompakten Bereich (z.B. in einem Reaktor), so wird man zusätzlich Randbedingungen spezifizieren müssen. Zum Beispiel kann der Rand gekühlt oder isoliert sein. Im allgemeinen hat man also zu der Wärmeleitungsgleichung noch Rand- und Anfangsbedingungen hinzuzufügen, um die Lösung eindeutig festzulegen.⁶ Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ein.

⁶Auch im unbeschränkten Fall haben wir Randbedingungen „im Unendlichen“, die wir bereits anfangs durch die Beschränkung auf $\mu = -\nu^2$ eingebaut haben.

8.2 Rand-Anfangswert-Probleme

- Lösungen von partiellen Differentialgleichungen werden erst durch zusätzliche Vorgaben wie Randbedingungen und Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt.
- Wir skizzieren an einem einfachen Fall, wie man aus der Fülle der möglichen Lösungen die konstruiert, die solche Zusatzbedingungen erfüllen.

In diesem Abschnitt wollen wir beispielhaft ein einfaches Rand-Anfangswert-Problem für die Wärmeleitungsgleichung behandeln, nämlich das Problem

$$\begin{aligned}\theta_t &= \theta_{xx}, \\ \theta(0, t) &= a, \quad \theta(\pi, t) = b, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x)\end{aligned}\tag{68}$$

Physikalisch ist das also die Temperaturentwicklung in einem Stab der Länge π , dessen Enden auf konstanter Temperatur a bzw. b gehalten werden, und dessen Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$ durch eine Funktion $\theta_0(x)$ vorgegeben ist, die natürlich $\theta_0(0) = a$ und $\theta_0(\pi) = b$ erfüllen muß.

Wir beginnen aber mit einem noch einfacheren Spezialfall, nämlich mit homogenen (adiabaten) Randbedingungen

$$\theta(0, t) = 0 = \theta(\pi, t).\tag{69}$$

Mit dem Separationsansatz haben wir (unter anderem) Lösungen der Differentialgleichung in der Form

$$e^{-\nu^2 t} \sin \nu x$$

mit beliebigem reellen ν bekommen. Betrachten wir nur solche mit ganzzahligem $\nu \in \mathbb{Z}$, so erfüllen diese automatisch die Randbedingungen (69). Also erfüllen die zweimal differenzierbaren Funktionen der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-k^2 t} \sin kx$$

die Differentialgleichung, die Randbedingungen und durch die Anfangsbedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx = \theta_0(x)$$

werden die Koeffizienten B_k als FOURIERKoeffizienten bestimmt:

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \theta_0(x) \sin kx \, dx.$$

Nun zum ursprünglichen Problem mit inhomogenen Randbedingungen (68). Entscheidend ist die Beobachtung, dass mit $\theta(x, t)$ auch

$$\hat{\theta}(x, t) = \theta(x, t) - (\alpha x + \beta)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist, weil die t -Ableitung und die doppelte x -Ableitung von $\alpha x + \beta$ verschwinden. Ist also $\hat{\theta}(x, t)$ eine (wie oben gewonnene) Lösung des Rand-Anfangswert-Problems mit homogenen Randbedingungen zu der Anfangswertfunktion

$$\hat{\theta}_0(x) = \theta_0(x) - \frac{b-a}{\pi} x - a,$$

so löst

$$\theta(x, t) = \hat{\theta}(x, t) + \frac{b-a}{\pi} x + a$$

das Problem (68).

8.3 Methode der Laplacetransformation

- Bei linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man versuchen, durch Anwendung der LAPLACETRANSFORMATION auf eine der Variablen die Zahl der (abgeleiteten) Variablen zu reduzieren. Im Fall von zwei Variablen führt das dann auf eine *gewöhnliche* Differentialgleichung.

Wir führen das an zwei Beispielen vor. Das erste hat vermutlich keine physikalische Bedeutung, aber die Mathematik ist einfach.

Beispiel 67. Löse das Rand-Anfangswertproblem

$$u_t + x u_x = xt, \quad u(x, 0) = 0 = u(0, t).$$

Wir bezeichnen die LAPLACETRANSFORMIERTE von u bezüglich t mit

$$U(x, s) := \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-st} dt.$$

Dann erhalten wir

$$sU(x, s) - \underbrace{u(x, 0)}_{=0} + xU_x(x, s) = \frac{x}{s^2}.$$

Wir betrachten dies für festes s als Differentialgleichung in x und machen nach kurzem Nachdenken den Ansatz

$$U(x, s) = Cx$$

Einsetzen liefert $(sC + C)x = \frac{x}{s^2}$, also $C = \frac{1}{s^2(s+1)}$. Damit erhalten wir

$$U(x, s) = \frac{x}{s^2(s+1)} = \frac{x}{s^2} - \frac{x}{s} + \frac{x}{s+1}.$$

Die Rücktransformation liefert nun

$$u(x, t) = xt - x + x e^{-t} = x(e^{-t} - 1 + t).$$

□

Das zweite Beispiel liefert wieder die Wärmeleitungsgleichung. Hier wird die Mathematik schwierig.

Beispiel 68 (Wärmeleitung und LAPLACETRANSFORMATION).

Energie-, Impuls- und Stofftransport, Abschnitt 2.3

Wir betrachten die Temperaturentwicklung in einer feuerhemmenden Wand, die durch Brand auf der Außenseite $x = b$ aufgeheizt wird. Wie sieht der Temperaturanstieg auf der Innenseite $x = 0$ aus? Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\theta_t = \theta_{xx}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\theta(x, 0) = 0$$

und den Randbedingungen

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{adiabate Oberfläche}$$

und

$$\theta(b, t) = \theta_b.$$

LAPLACETRANSFORMATION bezüglich t liefert für

$$u(x, s) = \mathcal{L}[\theta(x, t)](s) = \int_0^\infty \theta(x, t) e^{-st} dt$$

bei Verwendung der Anfangsbedingung die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - su = 0.$$

Dabei betrachten wir s als Parameter und unterstreichen das durch die Verwendung von $\frac{d}{dx}$ statt $\frac{\partial}{\partial x}$. Diese Gleichung ist leicht zu lösen:

$$u(x, s) = A(s)e^{-x\sqrt{s}} + B(s)e^{x\sqrt{s}}.$$

Die Koeffizienten A und B können dabei natürlich von dem Parameter s abhängen! Die Randbedingungen liefern nach LAPLACETRANSFORMATION

$$\frac{du}{dx}(0, s) = 0, \quad u(b, s) = \frac{\theta_b}{s}$$

und bestimmen damit A und B :

$$u(x, s) = \frac{\theta_b}{s} \frac{e^{-x\sqrt{s}} + e^{x\sqrt{s}}}{e^{-b\sqrt{s}} + e^{b\sqrt{s}}}.$$

Wir interessieren uns für $x = 0$:

$$u(0, s) = \frac{\theta_b}{s} \frac{2}{e^{-b\sqrt{s}} + e^{b\sqrt{s}}} = \frac{2\theta_b e^{-b\sqrt{s}}}{s} \frac{1}{1 + e^{-2b\sqrt{s}}}$$

Die Rücktransformation dieser Funktion ist nicht einfach, Mathematica zum Beispiel versagt den Dienst. In *Energie-, Impuls- und Stofftransport* wird der zweite Faktor in eine geometrische Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned} u(0, s) &= \frac{2\theta_b e^{-b\sqrt{s}}}{s} (1 - e^{-2b\sqrt{s}} + e^{-4b\sqrt{s}} - e^{-6b\sqrt{s}} + \dots) \\ &= 2\theta_b \left(\frac{e^{-b\sqrt{s}}}{s} - \frac{e^{-3b\sqrt{s}}}{s} + \dots \right) \end{aligned}$$

Die Rücktransformation

$$\mathbf{L}^{-1} \left[\frac{e^{-\alpha b\sqrt{s}}}{s} \right] = \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{2\sqrt{t}} \right)$$

ist immer noch schwierig. Die Funktion $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ ist die sogenannte komplementäre Gaußsche Fehlerfunktion.

Die Funktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

hatten Sie in der *Analysis II* kennengelernt. Damals wurde auch festgestellt, dass $\theta(x, t) := \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\lambda t}} \right)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\theta_t = \lambda \theta_{xx}$ liefert.

8.4 Ebene-Wellen-Lösungen der Wellengleichung

- Wir diskutieren für die Wellengleichung in beliebiger Raumdimension n einen ganz anderen Lösungsansatz.

Die Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad (70)$$

beschreibt die Ausbreitung von Wellen in einem isotropen Medium.

Man kann sie mit denselben Methoden behandeln, die wir bisher für die Wärmeleitungsgleichung betrachtet haben. Sie gestattet jedoch eine andere, von D'ALEMBERT entdeckte, sehr einfach hinzuschreibende und physikalisch bedeutungsvolle Klasse von Lösungen, auf die wir jetzt eingehen.

Wenn wir an den räumlich eindimensionalen Fall denken, kann man damit die verzerrungsfreie Übertragung von beliebigen Signalen durch einen verlustfreien Kanal beschreiben. Allgemeiner sollte in der zweidimensionalen Ebene die gerichtete Ausbreitung von „geraden“ Wellen beliebigen Profils und im dreidimensionalen Raum die von ebenen Wellenfronten möglich sein. Das beschreibt das nächste Beispiel.

Beispiel 69 (Ebene Wellen). Für (60) machen wir folgenden Ansatz

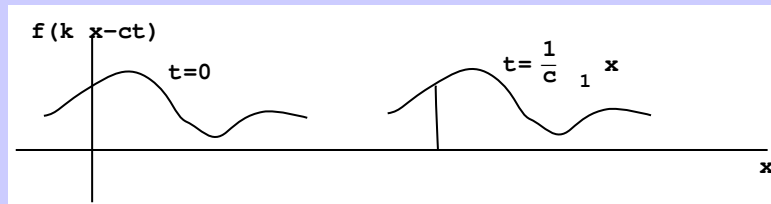
$$u(\vec{x}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct) \quad (71)$$

mit einem festen Vektor $\vec{k} \in \mathbb{R}^n$. Einsetzen in die Gleichung liefert

$$0 = \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum k_i^2 f''(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct) - f''(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct) = (\sum k_i^2 - 1) f''(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct).$$

Wir sehen, dass (71) für *beliebige* zweimal differenzierbare Funktionen f eine Lösung liefert, wenn nur $\sum k_i^2 = 1$, d.h. \vec{k} ein Einheitsvektor ist.

Die Interpretation dieses Sachverhalts ist die folgende. Die Funktion f beschreibt das Profil (Amplitude) einer Welle. Weil für feste Zeit t die Amplitude $f(\vec{k} \cdot \vec{x} - ct)$ senkrecht zu \vec{k} konstant ist, hat man (bei $n = 3$) ebene Wellenfronten, die sich unverzerrt (=dispersionsfrei) mit der Geschwindigkeit c in Richtung \vec{k} ausbreiten.



8.5 Separation in Zylinder- und Kugelkoordinaten

- Wir behandeln symmetrische DGL-Probleme durch den Einsatz angepasster Koordinatensysteme, wobei die Grundidee nach wie vor der Eulersche Separationsansatz ist.
- Wir stoßen dann nicht nur auf Sinusgleichungen, sondern auf kompliziertere gewöhnliche Differentialgleichungen, mit denen wir uns anschließend beschäftigen wollen.

Zur Abwechslung betrachten wir nicht die Wärmeleitungsgleichung, sondern die Wellengleichung, dieselben Methoden kann man für beide anwenden, vergleichen Sie *Energie-, Impuls- und Stofftransport*, Abschnitt 2.3.4.4.

Zylinderkoordinaten. Wir untersuchen ein schwingendes Medium in einem Kreiszyylinder.

Wir schreiben die Wellengleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (72)$$

Wir machen einen Produktansatz

$$u(\rho, \phi, z, t) = R(\rho)\Phi(\phi)Z(z)T(t).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Division mit u liefert

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Wie im letzten Abschnitt folgt daraus $T''(t) = c^2 \text{const} \cdot T(t) =: -\omega^2 T(t)$, wobei ω^2 positiv oder negativ, d.h. ω reell oder rein imaginär sein kann.

Weiter ist $Z''(z) = -h^2 Z(z)$ mit einer (ebenfalls positiven oder negativen) Konstanten h^2 . Dies liefert die Gleichungen

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad Z''(z) + h^2 Z(z) = 0. \quad (73)$$

Weiter sehen wir, dass

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = -\mu^2$$

für eine Konstante μ^2 mit

$$\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - h^2. \quad (74)$$

Es folgt

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \mu^2 \rho^2 + \frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = 0.$$

Wir finden

$$\Phi''(\phi) + \lambda^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (75)$$

und

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} + \mu^2 \rho^2 - \lambda^2 = 0. \quad (76)$$

Weil ϕ eine Winkelkoordinate in der Ebene ist, muß Φ die Periode 2π haben. Also ist $\lambda^2 > 0$. Die komplexe Lösungsbasis von (75) ist $e^{\pm i\lambda\phi}$, so dass also notwendig

$$\lambda \in \mathbb{Z}$$

ganzzahlig sein muß.

Wir wenden uns nun der Gleichung für R zu: Aus (76) erhalten wir

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\mu^2 \rho^2 - \lambda^2) R(\rho) = 0. \quad (77)$$

Das ist eine homogene lineare Differentialgleichung, aber keine mit konstanten Koeffizienten. Wir setzen

$$y(x) = R\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

Dann ist

$$y'(x) = \frac{1}{\mu} R'\left(\frac{x}{\mu}\right), \quad y''(x) = \frac{1}{\mu^2} R''\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

Mit der Substitution $x = \rho\mu$ ist die Gleichung (77) also äquivalent zu

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \lambda^2)y(x) = 0. \quad (78)$$

Das ist die sogenannte *BESSELgleichung*, die wir im nächsten Abschnitt untersuchen werden. Ihre Lösungen heißen aus einsichtigen Gründen auch *Zylinderfunktionen*. Die Gleichung hat für jedes ganzzahlige λ (bis auf Vielfache genau) eine *bei 0 beschränkte* Lösung

$$J_\lambda(x) = J_\lambda(\rho\mu),$$

die sogenannte *BESSELfunktion* 1. Art zum Index λ .

Unser Separationsansatz liefert uns also die Gleichungen (73), (75), (76) mit Lösungen, die in der einfacheren komplexen Form so aussehen

$$T(t) = e^{i\omega t}, \quad Z(z) = e^{ihz}, \quad \Phi(\phi) = e^{i\lambda\phi}, \quad R(\rho) = J_\lambda(\rho\mu). \quad (79)$$

Daraus ergeben sich mit dem Separationsansatz für unsere Wellengleichung die Lösungen

$$u(\rho, \phi, z, t) = J_\lambda(\rho\mu) e^{i(\lambda\phi + hz + \omega t)} \quad (80)$$

mit den folgenden Bedingungen für die Separationskonstanten:

$$\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - h^2 \quad \text{und} \quad \lambda \in \mathbb{Z}. \quad (81)$$

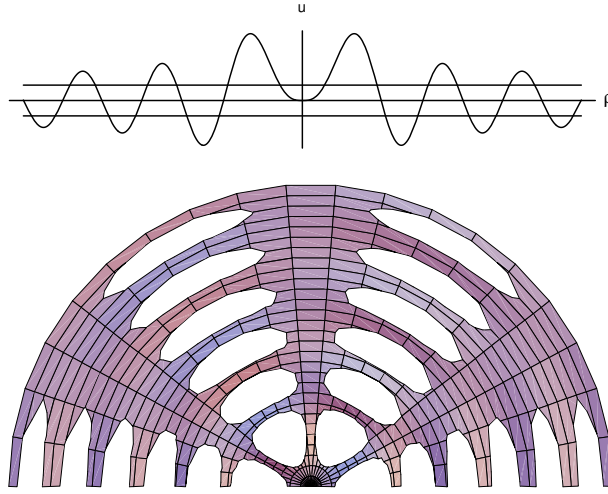
Wir wollen die Lösungen der Form (80) noch etwas veranschaulichen. Wir wählen dabei

$$\lambda = 3, \quad \omega = \mu = 1, \quad h = 0,$$

so dass die Lösung nicht von z abhängt. Wir betrachten eine Momentaufnahme zur Zeit $t = 0$. Weiter ersetzen wir $e^{i\lambda\phi}$ durch einen reellen Cosinusterm. Wir erhalten damit

$$v(\rho, \phi) = J_3(\rho) \cos \phi.$$

Wir betrachten einen Schnitt durch den Graphen v in der (ρ, v) -Ebene und einen Blick von oben auf diesen Graphen. Beim zweiten Bild haben wir aber die Bereiche mit $|v| > 0.1$ weggeschnitten. Dadurch erscheinen Löcher, deren Ränder gerade die Niveaulinien $v = -0.1$ bzw $v = +0.1$ sind. Die Vorzeichen wechseln sich dabei in ρ - wie in ϕ -Richtung ab.



Erzeugt wurden diese Bilder wie folgt:

```
In[36]:= a=.1;
u[r,phi]:= BesselJ[3,r] Cos[3 phi];
Plot[u[r,0],r,0,22.6];
ParametricPlot3D[{r Cos[phi],r Sin[phi],u[r,phi]},{r,0,22.6},{phi,0,Pi},
PlotRange->{-a,a},Axes->False,Boxed->False,ViewPoint->{0,0,1},
PlotPoints->{30,20}];
```

Kugelkoordinaten. In Kugelkoordinaten sieht die Wellengleichung so aus:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta})}{\partial \theta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (82)$$

Der Separationsansatz

$$u(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t)$$

führt ähnlich wie oben zu folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$T'' + \omega^2 T = 0 \quad (83)$$

$$\Phi'' + m^2 \Phi = 0 \quad (84)$$

$$r^2 R'' + 2rR' + (r^2 \frac{\omega^2}{c^2} - \nu^2)R = 0 \quad (85)$$

$$\Theta'' + \cot \theta \Theta' - (\frac{m^2}{\sin^2 \theta} - \nu^2)\Theta = 0 \quad (86)$$

mit Konstanten ω, ν und m . Weil die Lösung in ϕ offensichtlich 2π -periodisch sein muß, muß m ganzzahlig sein.

Die Gleichung (85) reduziert sich im Fall $\omega = 0$ auf

$$r^2 R'' + 2rR' - \nu^2 R = 0.$$

Weil die r -Potenz der Faktoren gleich der Ableitungsordnung ist, liegt ein Ansatz $R(r) = r^k$ nahe. Er liefert Lösungen genau dann, wenn $\nu^2 = k(k+1)$.

Im Fall $\omega \neq 0$ setzen wir $x = \frac{\omega}{c} r$ und $y(x) = \sqrt{x} R(r)$. Mit diesen Substitutionen wird (85) zur oben schon aufgetretenen BESSELgleichung (78) mit $\lambda^2 = \nu^2 + \frac{1}{4}$

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - (\nu^2 + \frac{1}{4})\right) y = 0.$$

Aus ihren Lösungen erhält man also mit $R(r) = y(\frac{\omega}{c} r) / \sqrt{\frac{\omega}{c} r}$ den radialen Anteil im Produktansatz.

Wir untersuchen nun noch (86). Hier machen wir die Variablensubstitution

$$x = \cos \theta, \quad \Theta(\theta) = y(x) = y(\cos \theta)$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \Theta'(y) &= -y'(\cos \theta) \sin \theta \\ \Theta''(\theta) &= y''(\cos \theta) \sin^2 \theta - y'(\cos \theta) \cos \theta. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung gibt

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + \left(\frac{m^2}{1 - x^2} - \nu^2 \right) y = 0. \quad (87)$$

Das ist die sogenannte allgemeine LEGENDREGleichung. Ihre Lösungen heißen LEGENDRE- oder Kugelfunktionen. Aus ihnen erhält man also vermöge $\Theta(\theta) = y(\cos \theta)$ den θ -Anteil für den Produktansatz. Wenn die Lösung u aber auf der z -Achse, also für $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ auch differenzierbar sein soll, so gibt dies eine Bedingung an die Lösungen von (87) an den Stellen $x = \pm 1$. Diese ist nur erfüllt, wenn $\nu^2 = k(k+1)$ mit ganzzahligem $k \geq m$ ist. Dabei kommt dem Fall $m = 0$ eine besondere Bedeutung zu. Dann wird (87) zur LEGENDREGleichung im engeren Sinne

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' - k(k+1)y = 0. \quad (88)$$

Vergleichen Sie dazu den Anhang.

Wir betrachten noch einmal das obige Ergebnis für die Wellengleichung in Zylinderkoordinaten und schließen mit einem

Beispiel 70 (Ein Rand-Anfangswert-Problem im Zylinder). Die Gleichung

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

hat Lösungen, die in Zylinderkoordinaten gegeben sind durch

$$u(\rho, \phi, z, t) = J_\lambda(\rho\mu) e^{i(\lambda\phi + hz + \omega t)}$$

mit den folgenden Bedingungen für die Separationskonstanten:

$$\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - h^2 \text{ und } \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Dabei war J_λ eine sogenannte BESSELFunktion 1. Art zum Index λ .

Wir beschreiben nun eine typische physikalische Situation, die eine eindeutig bestimmte Lösung erwarten läßt:

1. **Randbedingungen.** Wir spezifizieren zunächst einen Zylinder vom Radius 1 und der Höhe π

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } 0 \leq z \leq \pi\}$$

und verlangen, dass das schwingende Medium am Rand des Zylinders fixiert ist. (Geerdeter Rand bei elektromagnetischer Schwingung. Bei der Wärmeleitung entspricht das einer Kühlung auf konstante Temperatur 0 am Rand).

Im mathematischen Modell formulieren wir das als Randbedingungen

$$u(1, \phi, z, t) = u(\rho, \phi, 0, t) = u(\rho, \phi, \pi, t) = 0. \quad (89)$$

Von den oben angegebenen Separationslösungen kommen dann nur noch die in Frage, für die

- (a) die reelle Z -Lösung durch

$$Z(z) = \sin(hz) \text{ mit } \underline{\text{ganzzahligem}} \ h \in \mathbb{Z}$$

gegeben ist,

- (b) für die radiale Komponente

$$J_\lambda(\mu) = 0$$

ist. Nun werden wir sehen, dass J_λ unendlich viele positive Nullstellen $j_{\lambda;n}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ hat. Wir erinnern an (81) und setzen zu gewählten $h \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\omega_{\lambda,n,h}^2 = c^2(j_{\lambda;n}^2 + h^2)$$

Zusammenfassend erhalten wir also für jede ganzzahlige Wahl von λ, h und n eine Lösung

$$u_{\lambda,n,h}(\rho, \phi, z, t) = J_\lambda(\rho j_{\lambda;n}) \sin(hz) e^{i(\lambda\phi + \omega_{\lambda,n,h} t)}$$

des Randwertproblems. Superposition solcher Lösungen ist wieder eine Lösung des Randwertproblems.

2. **Anfangsbedingungen.** Aus physikalischen Gründen sollte die Schwingung im Zylinder eindeutig festgelegt sein, wenn man außerdem noch den Schwingungszustand zur Zeit $t = 0$ vorgibt. Das führt auf Anfangsbedingungen

$$u(\rho, \phi, z, 0) = u_0(\rho, \phi, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\rho, \phi, z, 0) = u_1(\rho, \phi, z)$$

mit vorgegebenen Funktionen $u_0(\rho, \phi, z)$ und $u_1(\rho, \phi, z)$, die die Anfangsbedingungen erfüllen. Bei beliebig vorgegebenen u_0, u_1 wird keine der obigen „Separationslösungen“ die Anfangsbedingungen erfüllen. Aber weil die Differentialgleichung homogen linear ist, sind Linearkombinationen dieser Separationslösungen wieder Lösungen. Man kann deshalb den Ansatz

$$u(\rho, \phi, z, t) = \sum_{\lambda, n, h \in \mathbb{Z}} c_{\lambda, n, h} u_{\lambda, n, h}(\rho, \phi, z, t)$$

machen und versuchen, wie bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen die Koeffizienten $c_{\lambda, n, h}$ so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingungen erfüllt werden.

Ob das geht, und wie man das macht, darauf gehen wir im Abschnitt 10 ein.

□

9 Die Besselsche Differentialgleichung

- Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass die Separation der Diffusionsgleichung bei Verwendung von Zylinder- oder Kugelkoordinaten auf gewisse kompliziertere gewöhnliche Differentialgleichungen führt.
- Für eine von ihnen, die Besselgleichung, finden wir eine modifizierte Potenzreihenlösung und diskutieren deren Eigenschaften.
- Die Lösung der Legendregleichung finden Sie im Anhang.
- Wir untersuchen das Verhalten der Lösungen in größerer Entfernung von der Quelle, ihr asymptotisches Verhalten.

Die BESSELSche Differentialgleichung ist gegeben durch

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0. \quad (90)$$

Die Gleichung ist linear und homogen, aber die Koeffizienten sind nicht konstant, sondern Polynome in x . Wenn man die Gleichung so normiert, dass der Koeffizient von y'' zu 1 wird, sind sie rationale Funktionen in x . Für die allgemeine Lösung auf dem Intervall $x > 0$ brauchen wir nach der Theorie zwei linear unabhängige Lösungen.



Wir werden im folgenden eine Lösungsmethode für diese Differentialgleichung vorstellen. Im Anhang Abschnitt 11.6 finden Sie das Verhalten der Lösungen (=BESSELFunktionen) beschrieben. Diese Untersuchungen sind an der BESSELgleichung exemplarisch für eine größere Klasse von Differentialgleichungen vorzuführen.

Es scheint nicht ganz abwegig, versuchsweise y als Polynom anzusetzen. Wenn das vom Grad n ist, so sind $x^2 y''$ und xy' auch vom Grad n . Allerdings ist $(x^2 - \lambda^2)y$ dann vom Grad $n + 2$, so dass dieser Ansatz nicht klappen wird. Stattdessen kann man versuchen y als *Potenzreihe* anzusetzen, dann ist man das Grad-Problem los. Der Versuch zeigt, dass die Rechnungen einfacher werden durch den Ansatz

$$y(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

weil das λ^2 in der Differentialgleichung kompensiert werden muß.

Wir wollen diesen Ansatz in die Differentialgleichung einsetzen und berechnen dazu zunächst die Ableitungen:

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1}.$$

Beachten Sie: Bei der Differentiation der Potenzreihe fällt der konstante Term weg. Wir können aber die Summe trotzdem bei 0 beginnen lassen, weil der Faktor $k = 0$ denselben Effekt hat. Ebenso findet man

$$y''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + 2\lambda x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1} + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.$$

Bevor wir dies in die Differentialgleichung einsetzen, betrachten wir noch den dann entstehenden Term

$$x^2 y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+2} = \sum_{k=2}^{\infty} b_{k-2} x^k.$$

Wir möchten auch diese Summe von 0 beginnen lassen, und definieren daher die bisher noch nicht vorkommenden Koeffizienten durch

$$b_{-2} := b_{-1} := 0.$$

Nun setzen wir ein:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 \left(\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + 2\lambda x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1} + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) b_k x^{k-2} \right) \\ &\quad + x \left(\lambda x^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} k b_k x^{k-1} \right) + x^2 x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k - \lambda^2 x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \\ &= x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda(\lambda-1)b_k + 2\lambda k b_k + k(k-1)b_k + \lambda b_k + k b_k + b_{k-2} - \lambda^2 b_k) x^k \\ &= x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} (2\lambda k b_k + k^2 b_k + b_{k-2}) x^k \end{aligned}$$

Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen müssen nun alle Koeffizienten = 0 sein:

$$k(k+2\lambda)b_k + b_{k-2} = 0.$$

Aus $b_{-1} = 0$ folgt, wenn λ keine negative ganze Zahl ist,

$$b_1 = -\frac{b_{-1}}{1(1+2\lambda)} = 0, \quad b_3 = -\frac{b_1}{3(3+2\lambda)} = 0, \quad \dots$$

Für die geraden Indizes von b sieht die Sache anders aus, weil

$$0(0+2\lambda)b_0 + b_{-2} = 0$$

keine Bedingung an b_0 stellt. Also können wir b_0 beliebig wählen und die b_{2m} rekursiv berechnen:

$$b_{2m} = -\frac{b_{2m-2}}{4m(\lambda+m)}.$$

Wieder wollen wir dabei voraussetzen, dass λ keine negative ganze Zahl ist, so dass der Nenner niemals 0 wird. Wir finden

$$\begin{aligned} b_{2m} &= -\frac{b_{2m-2}}{4m(\lambda+m)} = \frac{1}{4m(\lambda+m)} \frac{b_{2m-4}}{4(m-1)(\lambda+m-1)} = \dots \\ &= (-1)^m \frac{b_0}{4^m m! (\lambda+m)(\lambda+m-1) \dots (\lambda+1)} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$y(x) = b_0 x^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (\lambda+1) \dots (\lambda+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$

Es folgt leicht mit dem Quotientenkriterium, dass die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Deshalb hat unser Ansatz tatsächlich zum Ziel geführt: Wir haben eine Lösung unserer Differentialgleichung gefunden.

Es ist üblich, für b_0 einen ganz bestimmten, dem λ angepaßten Wert zu wählen: Wenn $\lambda = k \in \mathbb{N}$ ist, bietet sich

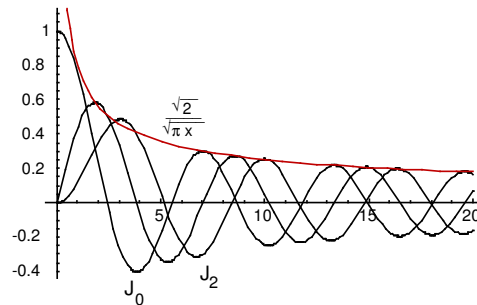
$$b_0 = \frac{1}{2^\lambda \lambda!}$$

an. Dann wird

$$y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(\lambda+m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m},$$

und diese Lösung nennt man die **BESSELFunktion 1. Art** J_λ zum Index λ . Ihre Reihe ist nicht viel komplizierter als zum Beispiel die Cosinusreihe.

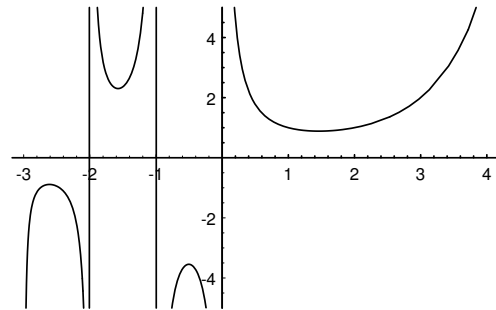
Im Anhang 11.6 finden Sie die Gestalt der Besselfunktionen diskutiert.



Bei den Zylinderkoordinaten war λ mit der Variablen ϕ gekoppelt und ganzzahlig. Bei den Kugelkoordinaten kommen aber auch nicht ganzzahlige Werte $\lambda = \sqrt{\nu^2 + \frac{1}{4}}$ vor. Dann ist $\lambda!$ nicht mehr definiert. Wie soll man b_0 in diesem Fall wählen?

Man benutzt dann eine Extrapolation der Fakultätsfunktion auf die ganze reelle Achse ausgenommen die negativen ganzen Zahlen, die sogenannte Gammafunktion Γ für die gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}, \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) \quad \text{für } -x \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$



Vergleiche auch Anhang 11.10.

Wie im ganzzahligen Fall setzt man damit nun

$$b_0 := \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}.$$

Wegen

$$\Gamma(\lambda+m+1) = (\lambda+m)\Gamma(\lambda+m) = \dots = (\lambda+m)\dots(\lambda+1)\Gamma(\lambda+1)$$

erhält man BESSELFunktionen:

$$\boxed{J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(\lambda+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.} \quad (91)$$

Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$, aber zunächst keine negative ganze Zahl.

Für ganzzahliges negatives λ kann man die Terme, bei denen $\Gamma(\lambda + m + 1)$ im Nenner einen Pol hat, einfach als Null interpretieren. Dann liefert die vorstehende Formel auch eine Lösung J_λ von (90), wie eine sorgfältige Analyse unseres Rekursionsansatzes zeigt. Dabei ergibt sich

$$\boxed{J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.} \quad (92)$$

Als lineare homogene Differentialgleichung hat die BESSELgleichung für festes λ zwei linear unabhängige Lösungen. Für $\lambda \notin \mathbb{Z}$ sind diese z.B. durch J_λ und $J_{-\lambda}$ gegeben. Die Unabhängigkeit folgt aus dem verschiedenen Verhalten für $x \searrow 0$. Für ganzzahliges $\lambda \in \mathbb{N}$ ist es schwieriger, eine von J_λ unabhängige Lösung anzugeben, vgl. den Anhang 11.7.

10 Gewöhnliche Rand- und Eigenwertprobleme

Sie haben im Abschnitt 8 gesehen, dass die Rand-Anfangswertprobleme wichtiger partieller Differentialgleichungen auf spezielle gewöhnliche Differentialgleichungen wie die BESSEL-Gleichung führen, dass von den gefundenen Lösungen aber nur spezielle gebraucht werden, die mit den Randbedingungen kompatibel sind. Weiter ist noch die Frage nach der Koeffizientenbestimmung für die Anfangsbedingungen offen. Sehen Sie insbesondere noch einmal das Beispiel 70 an.

Diesen Problemen wenden wir uns jetzt in einem allgemeineren Rahmen zu.

10.1 Zur Vorbereitung

10.1.1 Anfangswertprobleme gegen Randwertprobleme

- Anfangswertprobleme von halbwegs “anständigen” Differentialgleichungen sind eindeutig lösbar. Ganz anders sieht das aus mit den in vielen Anwendungen auftretenden Randwertproblemen, die wir zunächst untersuchen.
- Oft sind sie nur für spezielle Werte der mit dem Problem verbundenen Parameter lösbar, was auf sogenannte Rand-Eigenwert-Probleme und sogenannte Eigenlösungen führt.

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$L(y) = y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = h(x) \quad (93)$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Für $a \in I$ können wir dann

$$y(a) = \eta_a \text{ und } y'(a) = \eta'_a$$

beliebig vorgeben und erhalten eine eindeutig bestimmte Lösung $y(x)$. Es kommt aber häufig vor, dass man nicht den Funktionswert und die Ableitung an der Stelle a vorgeben möchte, sondern z.B. nur $y(a)$, dafür aber auch den Funktionswert an einer anderen Stelle b . Dann spricht man von einem *Randwertproblem* im Gegensatz zu dem Anfangswertproblem, weil a und b häufig der Anfangs- und Endpunkt des Intervalls J sind.

Frage: Gibt es auch für beliebig vorgeschriebene Randwerte genau eine Lösung?

Bezeichnen wir mit $L^{-1}(\{h\})$ den Lösungsraum von (93), so haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} Y_a : \mathbb{R}^2 &\rightarrow L^{-1}(\{h\}) \\ (\eta_a, \eta'_a) &\mapsto y(x), \end{aligned}$$

die jedem Paar von Anfangswerten in a die entsprechende Lösung zuordnet. Diese Abbildung „geschieht“ durch Lösen der Differentialgleichung. Sie ist offenbar bijektiv, und die Umkehrabbildung ist

$$Y_a^{-1} : y(x) \mapsto (y(a), y'(a)).$$

Sind $y(x)$ und $\tilde{y}(x)$ zwei Lösungen mit Anfangswerten (η_a, η'_a) bzw. $(\tilde{\eta}_a, \tilde{\eta}'_a)$, so ist für jedes reelle λ auch

$$(1 - \lambda)y(x) + \lambda\tilde{y}(x)$$

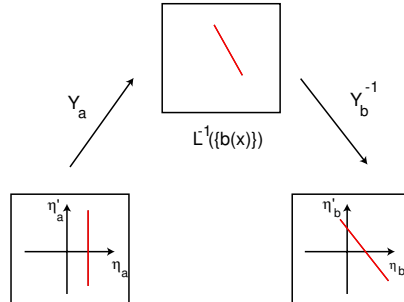
eine Lösung (Nachrechnen!) mit den Anfangsbedingungen

$$(1 - \lambda)(\eta_a, \eta'_a) + \lambda(\tilde{\eta}_a, \tilde{\eta}'_a).$$

Diese Anfangsbedingungen bilden eine mit λ parametrisierte Gerade im \mathbb{R}^2 und die zugehörigen Lösungen in $L^{-1}(h)$ bilden ebenfalls eine Gerade.

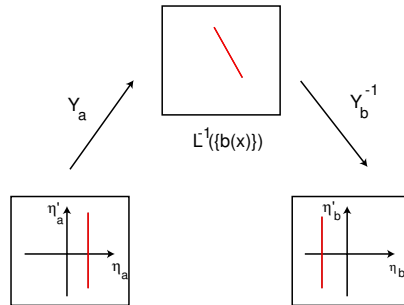
Eine entsprechende Abbildung Y_b haben wir im Punkt b .

Im nebenstehendem Diagramm ist diese Situation veranschaulicht. Links sind alle Anfangsbedingungen mit demselben η_a an der Stelle a eingezeichnet, oben die zugehörigen Lösungen der Differentialgleichung und rechts die entsprechenden „Endwerte“ an der Stelle b . In dieser Situation ist es klar, dass man η_b beliebig vorschreiben kann; es gibt dann genau eine Lösung mit den Randwerten η_a, η_b .



Sieht das Diagramm hingegen folgendermaßen aus, so ist das offensichtlich nicht mehr der Fall.

Der Anfangswert η_a legt η_b fest. Dafür kann man jetzt zu gegebenem η_a ein η'_b beliebig wählen. Auch dieser Fall, die Fixierung von η_a und η'_b , kommt in Anwendungen vor, vgl. das nachstehende Beispiel.



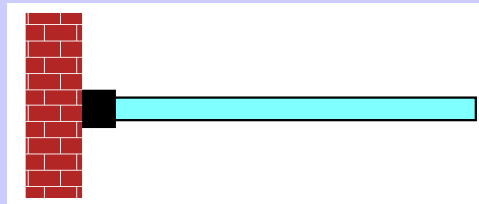
Welches Bild „das richtige“ ist, hängt von der konkreten Differentialgleichung ab.

Beispiel 71 (Balkenbiegung). Ein belasteter horizontaler Balken wird beschrieben als Graph der Funktion $y(x)$, die einer Differentialgleichung

$$y'' = b(x)$$

genügt. Dabei ist $b(x)$ gegeben durch die Biegesteifigkeit des Materials und das belastende Moment. Wir illustrieren verschiedene mögliche Anfangs- bzw. Randbedingungen:

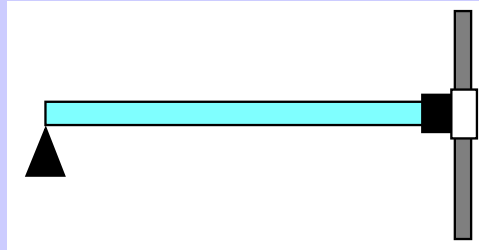
Anfangswertproblem:
 $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$



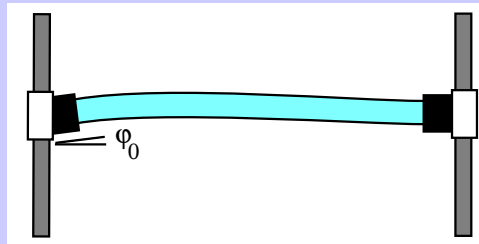
1. Randwertproblem:
 Feste Auflage an beiden Enden
 $y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$



2. Randwertproblem:
Feste Auflage links, fester Winkel rechts
 $y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$.



3. Randwertproblem:
Feste Winkel links und rechts
 $y'(0) = \phi_0, \quad y'(L) = 0$.



Wir wissen, dass die allgemeine Lösung der „Balkengleichung“ so aussieht:

$$y(x) = c_1 x + c_2 + y_P(x)$$

mit einer partikulären Lösung y_P . Die findet man durch zweimalige Integration von $b(x)$, aber wir müssen das hier nicht machen. Zur Vereinfachung wählen wir y_P mit Anfangsbedingungen $y_P(0) = y'_P(0) = 0$. (Warum dürfen wir das?). Dann finden wir

$$\begin{aligned} \eta_0 &= c_2, & \eta_L &= c_1 L + c_2 + y_P(L), \\ \eta'_0 &= c_1, & \eta'_L &= c_1 + y'_P(L). \end{aligned}$$

Also ergeben sich die Endwerte aus den Anfangswerten wie so:

$$\begin{aligned} \eta_L &= \eta'_0 L + \eta_0 + y_P(L), \\ \eta'_L &= \eta'_0 + y'_P(L). \end{aligned}$$

Die obigen Randbedingungen fixieren jeweils zwei der vier η -Größen, und es verbleiben zwei lineare Gleichungen für die restlichen zwei. Das Gleichungssystem kann

- eindeutig lösbar sein (Anfangswertproblem, 1. und 2. Randwertproblem),
- unlösbar sein (3. Randwertproblem mit $\eta'_L - \eta'_0 \neq y'_P(L)$) oder
- mehrere Lösungen haben (3. Randwertproblem mit $\eta'_L - \eta'_0 = y'_P(L)$)

Das Beispiel des Balkens ist typisch für die Situation bei Randwertproblemen. Üblicherweise hat man nach Fixierung der Randbedingungen in a und b zwei lineare Gleichungen für die zwei willkürlichen Koeffizienten c_1, c_2 in der allgemeinen Lösung. Aber anders als beim Anfangswertproblem treten hier eben alle drei Möglichkeiten für deren Lösungsmenge auf: Genau eine Lösung, keine Lösung, unendlich viele Lösungen. Welcher Fall vorliegt, kann man in der Regel erst entscheiden, wenn man die Differentialgleichung (oder wenigstens die zugehörige homogene) wirklich gelöst hat und sieht, wie sich die Anfangsbedingungen auf die Endbedingungen übertragen, vgl. die obigen Diagramme und zum Kontrast das folgende altbekannte Beispiel.

Beispiel 72 (Schwingende Saite). Die Differentialgleichung

$$y'' + \lambda y = 0, \quad \lambda > 0,$$

mit den Anfangsbedingung

$$y(0) = \eta_0, \quad y'(0) = \eta'_0$$

hat die Lösung

$$y(x) = \eta_0 \cos(\sqrt{\lambda} x) + \frac{\eta'_0}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Die Werte an der Stelle $x = \pi$ sind

$$\begin{aligned} \eta_\pi &= \eta_0 \cos(\sqrt{\lambda} \pi) + \frac{\eta'_0}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda} \pi) \\ \eta'_\pi &= -\sqrt{\lambda} \eta_0 \sin(\sqrt{\lambda} \pi) + \eta'_0 \cos(\sqrt{\lambda} \pi) \end{aligned}$$

Das Randwertproblem (an den Endpunkten eingespannte Saite)

$$y(0) = 0 = y(\pi)$$

hat im allgemeinen nur die triviale Lösung $y = 0$. Eine nicht-triviale Lösung existiert nur für spezielle Werte, nämlich

$$\lambda = k^2 \text{ mit ganzzahligem } k.$$

Diese Situation von Randwertproblemen mit einem Parameter nennt man *Rand-Eigenwertprobleme*.

Beispiel 73 (EULERSCHE Knicklast). Die Auslenkung X eines in Längsrichtung belasteten Stabes der Länge L wird gegeben durch die Gleichung

$$X'' + cPX = 0, \quad X(0) = X(L) = 0,$$

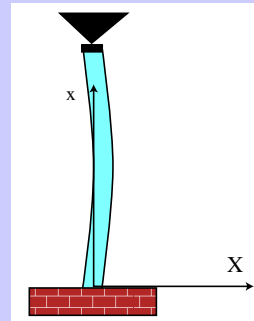
wobei P die Last und c eine Materialkonstante ist. Das ist dieselbe Gleichung wie für die schwingende Saite!

Für kleine Lasten gibt es nur die triviale Lösung: Der Stab knickt nicht ein. Erst bei der sogenannten *EULERSCHEN Knicklast*

$$P = c^{-1} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2$$

gibt es eine nichttriviale Lösung und damit eine (sinusförmige) Deformation.

Vergleichen Sie dazu auch das nicht-lineare Problem im Anhang 11.5.



10.1.2 Der Nutzen von Orthonormalsystemen

- Durch Superposition von Eigenlösungen findet man Lösungen, die vorgegebene Anfangsbedingungen erfüllen. Die Bestimmung der richtigen Koeffizienten wird wie in der Fouriertheorie durch die Orthogonalität von Eigenlösungen zu verschiedenen Eigenwerten erheblich vereinfacht.
- Warum das so ist, sehen wir an der analogen Situation von Orthonormalbasen in Euklidischen Vektorräumen.

Wir wiederholen, dem Anschein nach etwas unmotiviert, ein wenig lineare Algebra. Am Ende dieses Abschnitts werden Sie ahnen, welchen Zusammenhang es mit der Theorie der Differentialgleichungen gibt:

In der linearen Algebra sind Orthonormalbasen ein außerordentlich bequemes Hilfsmittel. Will man einen Vektor \vec{v} nach einer Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ entwickeln

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k,$$

so sind die Entwicklungskoeffizienten einfach gegeben durch

$$\lambda_k = \langle \vec{v}, \vec{v}_k \rangle,$$

wobei wir mit $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ das übliche Skalarprodukt bezeichnet haben.

Ebenfalls aus der linearen Algebra ist bekannt, dass die Eigenvektoren einer selbstadjungierten Matrix (d.h. $A = A^T$) zu *verschiedenen* Eigenwerten immer orthogonal sind. Das ist sehr leicht einzusehen: Ist $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ und $A\vec{y} = \mu\vec{y}$ mit $\lambda \neq \mu$, so folgt

$$\lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^T \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A\vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \mu \vec{y} \rangle = \mu \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Wir haben dabei benutzt, dass

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \right) y_j = \sum_{k=1}^n x_k \left(\sum_{j=1}^n a_{jk} y_j \right) = \langle \vec{x}, A^T \vec{y} \rangle$$

ist. Die adjungierte (=transponierte) Matrix ist durch diese Gleichung charakterisiert.

Wir fassen zusammen: Entwicklung nach *Orthonormalbasen* ist bequem, und man bekommt Orthonormalbasen zum Beispiel als Eigenvektoren einer selbstadjungierten Matrix. (Die Probleme mit mehrfachen Eigenwerten ignorieren wir hier.)

Diese angenehme Situation wiederholt sich bei den FOURIERREIHEN. Wir betrachten den von der Notation her einfacheren komplexen Fall. Die Entwicklung einer T -periodischen Funktion nach harmonischen Schwingungen

$$f(t) \sim \sum c_k e^{ik\omega t}, \quad \omega = 2\pi/T$$

ist leicht: Man muß nur die *FOURIERKoeffizienten* bestimmen, und die sind wieder Skalarprodukte, nun aber nicht mehr durch Summation über die Komponenten, sondern durch Integration definiert: ⁷

$$c_k = \langle f, e^{ik\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt.$$

⁷Das komplexe Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \bar{g}(t) dt$$

hat einen Querstrich (=Konjugation) auf dem zweiten Faktor, damit $\langle f, f \rangle \geq 0$. Im Reellen „sieht man davon nichts“.

Wesentlich ist dabei die *Orthogonalität* der harmonischen Schwingungen, also die Gleichung

$$\langle e^{ik\omega t}, e^{il\omega t} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-il\omega t} dt = 0 \quad \text{für } k \neq l.$$

Diese Orthogonalität kann man durch direkte Integration leicht nachweisen, und so wird es oft auch gemacht.

Man kann aber auch benutzen, dass $e^{ik\omega t}$ eine *Eigenfunktion* zum Eigenwert $-(k\omega)^2$ für die lineare Abbildung

$$L(y) := y''$$

ist (Nachrechnen!) und dass diese lineare Abbildung *selbstadjungiert* ist, d.h. dass

$$\langle L(f), g \rangle = \langle f, L(g) \rangle$$

gilt.

Beweis. Es gilt

$$L(f)\bar{g} - f\overline{L(g)} = f''\bar{g} - f\bar{g}'' = (f'\bar{g} - f\bar{g}')'$$

und daher für T -periodische Funktionen

$$\langle L(f), g \rangle - \langle f, L(g) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (f'\bar{g} - f\bar{g}')' dt = \frac{1}{T} (f'\bar{g} - f\bar{g}')|_0^T.$$

Wegen der Periodizität hat die rechts stehende WRONSKIDETERMINANTE in 0 und T denselben Wert, also ist der Ausdruck = 0 und $\langle L(f), g \rangle = \langle f, L(g) \rangle$.

Den Beweis, dass Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten von L bezüglich des Integral-Skalarproduktes senkrecht stehen, kann man dann von der obigen Matrixversion wörtlich übernehmen. \square

Das vorstehende Beispiel ist typisch für eine ganze Klasse von Rand-Eigenwertproblemen, wie wir im folgenden zeigen werden.

Zuvor erinnern wir aber noch einmal daran, dass die Entwicklung nach Eigenfunktionen ein wichtiges Mittel zur Lösung von Anfangswertaufgaben bei Randwertproblemen ist, vgl. Beispiel 70.

10.2 Selbstadjungiertheit und Orthogonalitätsrelationen

10.2.1 Das Sturmische Randwertproblem

- Die Lösungen von selbstadjungierte Differentialgleichungen mit geeigneten Randbedingungen erfüllen typischerweise Orthogonalitätsbedingungen.

Wir wollen die vorstehenden Überlegungen auf Verallgemeinerungen des Differentialoperators $L(y) = y''$ übertragen. Wir betrachten homogene lineare Differentialgleichungen der Form

$$L(y) := (p(x)y')' + q(x)y = 0 \quad (94)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen p, q auf einem Intervall $[a, b]$. Man nennt dies eine *selbstadjungierte Form* der Differentialgleichung. Der Name erklärt sich aus folgendem

Satz 74 (Selbstadjungiertheit im STURMSchen Randwertproblem). *Der Differentialoperator L ist selbstadjungiert, d.h. es gilt (für reellwertige Funktionen)*

$$\int_a^b L(y_1)(x)y_2(x)dx = \int_a^b y_1(x)L(y_2)(x)dx,$$

wenn eine der folgenden drei homogenen Randbedingungen erfüllt ist:

(i) Es gilt

$$p(a) = p(b) = 0. \quad (95)$$

(ii) y_1 und y_2 erfüllen dieselben Randbedingungen

$$y(a) = y(b) = 0. \quad (96)$$

(iii) y_1 und y_2 erfüllen dieselben allgemeineren Randbedingungen

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0 \quad (97)$$

mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0, \gamma^2 + \delta^2 > 0$.

Die Differentialgleichung (94) zusammen mit der homogenen Randbedingung (97) nennt man auch eine STURMSche Randwertaufgabe.

Beweis. Es gilt wieder

$$L(y_1)y_2 - y_1L(y_2) = (py_1')'y_2 + qy_1y_2 - y_1(py_2')' - qy_1y_2 = (p(y_1'y_2 - y_2'y_1))'$$

und daher

$$\int_a^b (L(y_1)y_2 - y_1L(y_2))dx = p \det W(y_1, y_2)|_a^b.$$

Sind $p(x)$ oder $y_1(x)$ und $y_2(x)$ an beiden Endpunkten = 0 so folgt die Behauptung. Aus der Bedingung (iii) folgt mit der transponierten WRONSKIMatrix

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_1'(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\det W(y_1, y_2)_{x=a} = 0$ und ebenso $\det W(y_1, y_2)_{x=b} = 0$. □

Beispiel 75 (BESSELgleichung). Die BESSELgleichung

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

liefert für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ die folgende Differentialgleichung für $v(x) = y(\mu x)$:

$$x^2 v'' + xv' + (\mu^2 x^2 - \lambda^2)v = 0.$$

oder, nach Division durch x

$$(xv')' + \left(\mu^2 x - \frac{\lambda}{x}\right)v = 0.$$

Das ist in selbstadjungierter Form. Wählt man $\lambda = 0$ oder $\lambda \geq 2$, so ist $J'_\lambda(0) = 0$. Ist weiter $\mu > 0$ eine Nullstelle von J_λ , so erfüllt die zugehörige Lösungsfunktion $v(x) = J_\lambda(\mu x)$ die homogenen Randbedingungen

$$v'(0) = 0, \quad v(1) = 0.$$

□

Selbstadjungierte Schreibweise. Nicht nur die BESSELgleichung läßt sich in selbstadjungierter Form schreiben. Das gilt tatsächlich sehr viel allgemeiner: Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \tag{98}$$

hat dieselbe Lösungsmenge, wie

$$e^{s(x)}(a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y) = 0,$$

mit einer beliebigen Funktion $s(x)$. Man kann sie also „umnormieren“. Setzt man nun voraus, dass

$$a_0 > 0$$

und wählt man $s(x) = \int \frac{a_1(\xi) - a'_0(\xi)}{a_0(\xi)} d\xi$, so ergibt sich $a_1(x) - a'_0(x) - s'(x)a_0(x) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} & e^{s(x)}(a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y) \\ &= (e^{s(x)} a_0 y')' + e^{s(x)}(a_1 - a'_0(x) - s'(x)a_0(x))y' + e^{s(x)} a_2 y \\ &= (e^{s(x)} a_0 y')' + e^{s(x)} a_2 y. \end{aligned}$$

Jede Differentialgleichungsfamilie der Form (98) läßt sich also in selbstadjungierter Form schreiben, man muß nur den Faktor $e^{s(x)}$ bestimmen.

10.2.2 Orthogonalität der Eigenfunktionen (STURM-LIOUVILLE)

Wir kommen nun zur Orthogonalität der Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialoperatoren in einer etwas verallgemeinerten Formulierung. Wir betrachten das sogenannte STURM-LIOUVILLESCHES Eigenwertproblem:

Sei $Q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive Funktion. Wir betrachten zwei Lösungen y_1, y_2 von

$$\boxed{(py')' + (q + \lambda Q)y = 0} \quad (99)$$

zu verschiedenen λ -Werten λ_1 bzw. λ_2 .

Mit den obigen Bezeichnungen haben wir also

$$L(y_1) = -\lambda_1 Q y_1, \quad L(y_2) = -\lambda_2 Q y_2,$$

d.h. die y_k sind bis auf den Faktor Q Eigenfunktionen von L zu den Eigenwerten $-\lambda_k$. Mit $\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$ ergibt sich dann unter jeder der Randbedingungen aus Satz 74, dass

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)\langle y_1, Q y_2 \rangle &= \lambda_1 \langle y_1, Q y_2 \rangle - \lambda_2 \langle Q y_1, y_2 \rangle \\ &= \langle y_1, \lambda_1 Q y_2 \rangle - \langle \lambda_2 Q y_1, y_2 \rangle \\ &= -\langle y_1, L(y_2) \rangle + \langle L(y_1), y_2 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt der

Satz 76 (Orthogonalitätssatz zum STURM-LIOUVILLE-Problem). Für zwei Lösungen y_1, y_2 von

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda Q(x))y = 0$$

zu verschiedenen λ -Werten λ_1 bzw. λ_2 gilt

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)Q(x)dx = 0,$$

falls eine der drei Randbedingungen (95), (96), (97) aus Satz 74 erfüllt ist.

Beispiel 77. Bedingung (96) ist erfüllt für die schwingende Saite

$$\begin{aligned} y'' + k^2 y &= 0, \quad k \in \mathbb{Z} \\ y(0) &= y(\pi) = 0 \end{aligned}$$

und liefert

$$\int_0^\pi \sin kx \sin lx dx = 0, \quad k, l \in \mathbb{Z}, k \neq l.$$

□

Beispiel 78. Die selbstadjungierte BESSELGleichung aus dem Beispiel 75 mit $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ kann man auch als Eigenwertproblem schreiben:

$$(xv')' + \left(-\frac{\lambda}{x}\right)v + \mu^2 x v = 0$$

mit der Randbedingung vom Typ (97)

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Die Eigenwerte μ sind gerade die positiven Nullstellen $j_{\lambda;k}$ von J_λ . Man erhält die sogenannten Orthogonalitätsrelationen für die BESSELFunktionen:

$$\int_0^1 J_\lambda(j_{\lambda;k}x)J_\lambda(j_{\lambda;l}x)xdx = 0 \text{ für } k \neq l.$$

□

10.3 Eigenwerte und die Entwicklung nach Eigenfunktionen

10.3.1 Die Folge der Eigenwerte

- Bisher haben wir uns mit der Orthogonalität der Eigenlösungen von selbstadjungierten Differentialgleichungen beschäftigt.
- Wenn man diese Eigenschaft benutzen will, um „beliebige Funktionen“ durch Eigenlösungen darzustellen, also eine verallgemeinerte FOURIERENTWICKLUNG vornehmen will, braucht man natürlich auch, dass es genug Eigenlösungen gibt. Wir lernen, unter welchen Bedingungen das der Fall ist.

Vergleichen Sie auch *Energie-, Impuls- und Stofftransport, Abschnitt 2.3.4.*

Definition 79 (Eigenwerte und -funktionen). Wir betrachten eine selbstadjungierte Differentialgleichung (99) mit der Randbedingung (97). Gibt es zu einem Parameterwert λ eine nichttriviale Lösung $y(x)$ des Randwertproblems, so nennt man λ einen *Eigenwert* und $y(x)$ eine zugehörige *Eigenfunktion* des Randwertproblems

$$\begin{aligned}(py')' + (q + \lambda Q)y &= 0 \\ \alpha y(a) + \beta y'(a) &= \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0\end{aligned}\tag{100}$$

mit $\alpha^2 + \beta^2 > 0, \gamma^2 + \delta^2 > 0$. Wir erinnern noch einmal daran, dass die Randbedingungen konkret z.B. so aussehen können:

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (\text{Dirichletsche Randbedingung}),$$

oder

$$y'(a) = y'(b) = 0 \quad (\text{Neumannsche Randbedingung}).$$

Satz 80 (Folge der Eigenwerte und Oszillation). *Sind*

$$p(x) > 0, \quad Q(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b],$$

so gilt: Die Eigenwerte des Rand-Eigenwertproblems (100) bilden eine unendliche Folge

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$$

reeller Zahlen, die gegen $+\infty$ konvergiert. Jede Eigenfunktion zu λ_n hat in $]a, b[$ genau n Nullstellen.

Beweisidee. Wir geben die Beweisidee für die Randwerte $y(a) = 0 = y(b)$ mit $a = 0$. Wir verwenden einen Trick, der früher auch das Nullstellenverhalten der BESSELFUNKTIONEN lieferte: Wir machen aus der Differentialgleichung für $y(x)$ eine für $v(x) := \frac{y(x)}{m(x)}$ und bestimmen m so, dass die neue Gleichung keinen v' -Term enthält. Wir finden $m = p^{-1/2}$ und dann die äquivalente Differentialgleichung

$$v'' + \left(\frac{q}{p} + \frac{p'}{4p^2} + \lambda \frac{Q}{p} \right) v = 0.\tag{101}$$

Die Nullstellen von v sind gleichzeitig die von y . Für sehr großes $|\lambda|$ sieht das aus wie die Differentialgleichung

$$v'' + \lambda \frac{Q}{p} v = 0.\tag{102}$$

Ist $Q/p = C$ konstant (und natürlich > 0), so sehen die Lösungen von (102) mit $y(0) = 0$ folgendermaßen aus:

$$v(x) = \begin{cases} A \sinh(\sqrt{-C\lambda}x) & \text{für } \lambda < 0, \\ Ax & \text{für } \lambda = 0, \\ A \sin(\sqrt{C\lambda}x) & \text{für } \lambda > 0. \end{cases}$$

Läßt man λ aus dem Negativen langsam wachsen, so geschieht folgendes:

- Zunächst gibt es keine positiven Nullstellen, weil $\sinh x > 0$ für $x > 0$.
- Wird λ positiv, so ist die erste positive Nullstelle bei $x = \pi/\sqrt{C\lambda}$, also zunächst viel größer als b .
- Wächst λ weiter, so wird dieser Wert kleiner, bis schließlich $\pi/\sqrt{C\lambda} = b$. Dieses λ ist der erste Eigenwert λ_0 von (102).
- Wächst λ weiter, so „rutschen“ immer mehr Nullstellen in das Intervall $[0, b]$, und für jeden „Durchgang“ einer Nullstelle durch b erhält man einen Eigenwert von (102).

Mit einigem Aufwand an Mathematik läßt sich dieses Argument auf den Fall von variablem Q/p ausdehnen und schließlich auf (101) übertragen. \square

Beispiel 81 (Schwingende Saite). Das Rand-Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \\ y(0) = 0 &= y(\pi) \end{aligned}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_k = k^2, k \in \mathbb{N}$ mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$y_k(x) = \sin kx.$$

Beispiel 82 (Ringmembran). Wir betrachten Wellen in einem ebenen Ringbereich

$$a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$$

mit $0 < a < b$, d.h wir suchen Lösungen des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_{xx} + u_{yy} = c^{-2}u_{tt}, \\ u(x, y, t) &= 0 \text{ für } x^2 + y^2 = a^2 \text{ und } x^2 + y^2 = b^2. \end{aligned}$$

Das kann man interpretieren als eine am Rand eingespannte Ringmembran oder als eine elektromagnetische Schwingung in einem langen Doppelzylinder.

Separation dieser partiellen Differentialgleichung in Polarkoordinaten führt auf folgendes System entkoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{T} + c^2\omega^2 T &= 0, \\ \Phi'' + n^2\Phi &= 0, \\ \rho^2 R'' + \rho R' + (\rho^2\omega^2 - n^2)R &= 0. \end{aligned}$$

Da die Winkelfunktion Φ natürlich 2π -periodisch sein soll, folgt $n \in \mathbb{N}$. Diese Zahl kontrolliert also die Zahl der Wellenmaxima beim Umlauf um die Achse.

Nach Division durch das in unserem Fall positive ρ können wir die letzte Gleichung (die BESSELgleichung) schreiben als

$$(\rho R)' - \frac{n^2}{\rho} R + \omega^2 \rho R = 0, \quad (103)$$

mit der Randbedingung

$$R(a) = 0 = R(b).$$

Nach dem obigen Satz gibt es (für jedes feste $n \in \mathbb{N}$) eine gegen Unendlich konvergierende Folge

$$\omega_0^2 < \omega_1^2 < \dots$$

von Eigenwerten. Die ω_k sind die Eigenfrequenzen der Membran und k zählt die Wellenmaxima in radialer Richtung.

Wir wollen noch den Zusammenhang mit den Standard-BESSELFunktionen klären. Die BESSELgleichung in der üblichen Form

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

hat als Lösungsbasis die BESSELFunktionen erster und zweiter Art J_n und Y_n . Eine Lösungsbasis von (103) sind dann die Funktionen $J_n(\omega x)$ und $Y_n(\omega x)$. Also lassen sich für gewisse Frequenzen ω diese beiden Funktionen so nicht-trivial linear kombinieren, dass sie in a und b verschwinden:

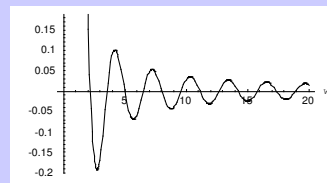
$$\begin{aligned} \alpha J_n(a\omega) + \beta Y_n(a\omega) &= 0, \\ \alpha J_n(b\omega) + \beta Y_n(b\omega) &= 0. \end{aligned}$$

Aber das hat genau dann eine nicht-triviale Lösung, wenn die Systemmatrix die Determinante null hat:

$$d(\omega) = J_n(a\omega)Y_n(b\omega) - J_n(b\omega)Y_n(a\omega) = 0.$$

Die Nullstellen dieser Funktion sind also die Eigenfrequenzen unseres Randwertproblems. Wir geben einen Mathematica-Plot dieser Funktion

```
a = 1; b = 3; n = 3;
Plot[BesselJ[n, a ω]]BesselY[n, b ω] -
BesselJ[n, b ω]BesselY[n, a ω],
{ω, 0, 20},
AxesLabel -> {ω, None}];
```



10.3.2 Entwicklung nach Eigenfunktionen

In der Linearen Algebra lernt man: Ist $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ein System orthonormaler Vektoren im \mathbb{R}^n , so läßt sich jeder Vektor \vec{x} darstellen als

$$\vec{x} = \sum (\vec{x} \cdot \vec{v}_k) \vec{v}_k. \quad (104)$$

Man kann aber

$$\langle y_1, y_2 \rangle_Q := \int_a^b y_1(x) y_2(x) Q(x) dx$$

als ein Skalarprodukt im Vektorraum der Funktionen⁸ betrachten. Wir haben schon gesehen, dass die Eigenfunktionen von (100) orthogonal bezüglich dieses Skalarproduktes sind, vgl. Satz 76.

Satz 83 (Entwicklungssatz). *Wir betrachten wieder das Rand-Eigenwertproblem (100) mit $p, Q > 0$. Ist $y_n(x)$ eine Folge von normierten Eigenfunktionen zu den λ_n , d.h. gilt*

$$\langle y_m, y_n \rangle_Q = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so läßt sich jede stetig differenzierbare Funktion f , die die Randbedingungen erfüllt, schreiben als

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, y_n \rangle_Q y_n. \quad (105)$$

Der Beweis ist viel schwerer als im Fall des \mathbb{R}^n . Er übersteigt die Möglichkeiten dieser Vorlesung.

Beispiel 84 (FOURIERREIHEN). Die ungeraden Funktionen der Periode π erfüllen auf $[0, \pi]$ die Randbedingungen

$$y(0) = y(\pi) = 0.$$

Die Eigenwerte der Schwingungsgleichung $y'' + \lambda y = 0$ mit diesen Randbedingungen sind $\lambda = k^2, k \in \mathbb{N}$, und die Funktionen $\sin kx$ sind zugehörige Eigenfunktionen. Wegen

$$\int_0^{\pi} \sin^2 kx dx = \frac{\pi}{2}$$

sind die Funktionen $y_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$ ein normiertes System von Eigenfunktionen. Stetig differenzierbare Funktionen f auf $[0, \pi]$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$ lassen sich entwickeln in der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Das wußten wir schon. □

Beispiel 85 (FOURIER-BESSEL-REIHEN). Wir kommen zurück zum Beispiel 82 und betrachten radialsymmetrische Wellen, d.h. den Fall $n = 0$. Sei $R_k(\rho)$ eine normierte Lösung zum Eigenwert ω_k^2 . Die Gleichung

$$\ddot{T} + c^2 \omega_k^2 T = 0$$

hat die Lösungen

$$T(t) = a_k \cos(c\omega_k t) + b_k \sin(c\omega_k t).$$

Damit findet man für das Ringmembranproblem folgende Lösungen

$$u(\rho, t) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\rho) (a_k \cos(c\omega_k t) + b_k \sin(c\omega_k t))$$

⁸ Genauer: Im Vektorraum der stückweise stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$, welche die Randbedingungen erfüllen.

Die Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ ergeben sich als

$$u(\rho, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R_k(\rho)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k c\omega_k R_k(\rho)$$

Stetig differenzierbare Anfangsbedingungen lassen sich nach dem Entwicklungssatz realisieren. Dabei ist

$$a_k := \int_a^b u(\rho, 0) R_k(\rho) \rho d\rho, \quad b_k := \int_a^b u_\rho(\rho, 0) R_k(\rho) \rho d\rho.$$

□

11 Anhang

Das Material in diesem Anhang kann, muß aber nicht Gegenstand der Vorlesungen zu diesem Modul sein. Insbesondere im kürzeren Sommersemester wird es oft nicht unterzubringen sein.

Dennoch erschien es wünschenswert, die hier angesprochenen Themen in der Ihnen vertrauten Sprache dieses Skriptes bereitzustellen.

11.1 Wiederholung: Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte λ findet man als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (106)$$

Zu jedem Eigenwert λ findet man die Eigenvektoren \vec{v} durch Lösen der Eigenvektorgleichung

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}. \quad (107)$$

Die Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms von höherem Grad bleibt natürlich eine schwierige Aufgabe.

Gleichung (107) ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, das nicht-triviale Lösungen hat und deshalb nicht eindeutig lösbar ist. Die Eigenvektoren zu λ bilden einen Vektorraum, den *Eigenraum* zum Eigenwert λ .

Wieviele EigenWERTE gibt es? Sei A eine (n, n) -Matrix. Dann ist das charakteristische Polynom vom Grad n und hat daher n Nullstellen.

Natürlich können Nullstellen zusammenfallen. Ist λ eine k -fache Nullstelle, so nennt man λ einen Eigenwert der *algebraischen Vielfachheit* k .

Es kann auch vorkommen, dass das charakteristische Polynom *komplexe* Nullstellen hat. Dann ist $A - \lambda E$ eine komplexe Matrix und die Eigenvektorgleichung ein komplexes lineares Gleichungssystem. Die Lösungsmethoden dafür sind dieselben wie im Reellen (Gaußalgorithmus). Die zugehörigen Eigenvektoren liegen dann im \mathbb{C}^n , d.h es sind Vektoren mit komplexen Komponenten.

Beispiel 86. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

hat die charakteristische Gleichung $(1 - \lambda)^2 + 1 = 0$. Sie hat die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm i.$$

Die Eigenvektorgleichung für $\lambda_1 = 1 + i$ ist

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist die zweite Gleichung das i -fache der ersten und

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1 + i$. Für den Eigenwert $\lambda_2 = 1 - i$ findet man einen Eigenvektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ □

Konjugierte Eigenwerte und -vektoren. Im vorstehenden Beispiel unterscheiden sich die beiden Eigenwerte nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils, sie sind *konjugiert* zu einander. Das ist bei *reellen* Matrizen immer so: Ist $\lambda = \alpha + i\omega$ ein Eigenwert, so auch die dazu konjugiert-komplexe Zahl $\bar{\lambda} = \alpha - i\omega$. Das liegt daran, dass das charakteristische Polynom $a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n$ reelle Koeffizienten a_i hat. Daher ist

$$a_0 + a_1\bar{\lambda} + \dots + a_n\bar{\lambda}^n = \overline{a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n} = 0.$$

Zum konjugierten Eigenwert gehören die (komponentenweise) konjugierten Eigenvektoren.

Wieviele EigenVEKTOREN gibt es? Natürlich unendlich viele, weil Vielfache von Eigenvektoren wieder Eigenvektoren sind. Und zu jedem Eigenwert gibt es wenigstens einen Eigenvektor. Wir fragen deshalb präziser:

Wieviele linear unabhängige Eigenvektoren gibt es? Zunächst gilt: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ einer n -reihigen Matrix A hat n komplexe Nullstellen, wenn man sie mit Vielfachheiten zählt.

1. Fall Wenn alle n Eigenwerte verschieden sind, findet man dazu n (eventuell auch komplexe) linear unabhängige Eigenvektoren. Mehr kann man im n -dimensionalen reellen oder komplexen Raum auch gar nicht haben. Sie bilden dann eine Basis und jeder Vektor ist Linearkombination dieser Eigenvektoren.

2. Fall Wenn das charakteristische Polynom eine k -fache Nullstelle λ besitzt, $k > 1$, gibt es zwei Möglichkeiten:

- Die Eigenvektorgleichung hat k linear unabhängige Lösungen zu λ . Dann ist dieser k -fache Eigenwert „so gut“ wie k verschiedene Eigenwerte.
- Die Eigenvektorgleichung zu λ liefert weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren. Man sagt, die *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes sei kleiner als seine algebraische Vielfachheit.

Mehr als k linear unabhängige Eigenvektoren zu λ kann es nicht geben.

Beispiel 87. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den doppelten Eigenwert 2. Aber

$$A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Rang 1, und deshalb gibt es nur einen linear unabhängigen Eigenvektor zu diesem Eigenwert, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. □

Defizite bei den Eigenvektoren: Hauptvektoren. Sei λ eine k -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A , aber es gebe weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren zu λ .

Jeder λ -Eigenvektor von A erfüllt

$$(A - \lambda E)\vec{v} = 0 \tag{108}$$

und damit erst recht die Gleichung

$$(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0. \quad (109)$$

A priori hat aber (109) *mehr* Lösungen als (108). Sie heißen *Hauptvektoren*. Eigenvektoren sind also spezielle Hauptvektoren. Zu einer k -fachen Nullstelle λ gibt es immer k linear unabhängige Hauptvektoren.

Selbstadjungierte Matrizen. Das ist ein bequemer Fall: Ist A eine symmetrische (=selbstadjungierte) (n, n) -Matrix, also $a_{ij} = a_{ji}$, so gibt es im \mathbb{R}^n immer eine Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ aus Eigenvektoren von A , die zueinander orthogonal und von der Länge 1 sind, eine sogenannte Orthonormalbasis. Insbesondere sind alle Eigenwerte reell, es gibt keine echt komplexen, und ist λ ein k -facher Eigenwert, so besitzt er k -linear unabhängige (sogar orthonormale) Eigenvektoren. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten (einer symmetrischen Matrix) sind immer orthogonal zueinander.

11.2 Die Matrix-Exponential-Lösung

Vergleichen Sie hierzu *Regelung in der Luft- und Raumfahrt, Abschnitt 4.1.2* oder *Regelungstechnik II, Abschnitt 3.2*.

Wir beschreiben eine sehr elegante Methode, um homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten zu lösen, also Systeme der Form

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\quad \dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{nm}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

oder kurz

$$\vec{y}' = A\vec{y}.$$

Für $n = 1$ ist das einfach

$$y' = ay,$$

und das hat die Lösungen

$$y = e^{ta}b,$$

wobei b eine beliebige Konstante, nämlich $y(0)$ ist.

Im allgemeinen Fall kann man $\vec{y}(t) = e^{xA}b$ versuchen, aber was soll das bedeuten? Nun, (n, n) -Matrizen kann man miteinander multiplizieren und addieren, also kann man

$$\sum_{k=0}^K \frac{x^k}{k!} A^k$$

wenigstens für endliches K bilden. Man erhält wieder eine (n, n) -Matrix mit von x abhängigen Koeffizienten. Und man kann beweisen, dass diese Koeffizienten für $K \rightarrow \infty$ für jedes x konvergieren. Den Grenzwert nennt man e^{xA} . Weiter kann man die entstehende Reihe einfach gliedweise differenzieren und erhält – wie bei $n = 1$ –

$$\frac{d}{dx} e^{xA} = A e^{xA} \quad (\text{Produkt von zwei Matrizen}).$$

Zurück zu unserem Ansatz für die Differentialgleichung. Weil \vec{y} eine vektorwertige Funktion werden soll, muß natürlich b ein Vektor $b = \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ sein. Und tatsächlich ist dann

$$\vec{y}(x) = e^{xA}\vec{v}$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems mit der Anfangsbedingung $\vec{y}(0) = \vec{v}$.

Die kann man also einfach so hinschreiben! Nur ist sie nicht so einfach auszurechnen, weil man alle die Matrixpotenzen bilden und addieren und schließlich den Grenzwert der unendlichen Reihe bilden muß. Wenn allerdings $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist, folgt

$$e^{xA}\vec{v} = e^{\lambda x}\vec{v},$$

und man ist wieder bei der Eigenwertmethode angekommen.

Weiter erhalten wir mit

$$e^{\lambda x E} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j x^j}{j!} E^j = e^{\lambda x} E$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$

$$e^{xA}\vec{v} = e^{\lambda x E + x(A - \lambda E)}\vec{v} = e^{\lambda x E} e^{x(A - \lambda E)}\vec{v} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}.$$

Ist nun \vec{v} ein Hauptvektor, also etwa $(A - \lambda E)^k \vec{v} = 0$, so ergibt sich eine *endliche* Summe

$$e^{xA} \vec{v} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j}{j!} (A - \lambda E)^j \vec{v}. \quad (110)$$

Dies liefert den Zusammenhang mit dem Satz 27.

Warnung. Man könnte meinen, wenn $B(x)$ allgemeiner eine matrixwertige Funktion und $B'(x) = A(x)$ ist, dann sei $\vec{y}(x) = e^{B(x)} \vec{v}$ eine Lösung von

$$\vec{y}' = A(x) \vec{y}.$$

Das ist falsch, weil im allgemeinen $\frac{d}{dx} e^{B(x)} \neq B'(x) e^{B(x)}$. Der Grund liegt in der Nicht-Kommutativität der Matrizenmultiplikation. Es gilt

$$\frac{d}{dx} B^2(x) = B'(x)B(x) + B(x)B'(x) \neq 2B'(x)B(x).$$

11.3 Erhaltungsgrößen: Die Keplerschen Gesetze

Beispiel 88 (Keplersche Gesetze als Konsequenz der NEWTONSchen Bewegungsgleichung).

Die KEPLERSchen Gesetze für die Bewegung der Planeten in einem Zentralfeld besagen:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt.
2. Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen.

Sie sind eine Folge der NEWTONSchen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{x}} = -\gamma m M \frac{\vec{x}}{r^3}, \quad r = \|\vec{x}\|. \quad (111)$$

Dies ist eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung im 3-Dimensionalen. Es besteht wenig Hoffnung die Lösungen explizit hinschreiben und daran die KEPLERSchen Gesetze ablesen zu können. Auch eine numerische Behandlung kann diese Gesetz allenfalls „unterstützen“, sie aber nicht beweisen. Das zugehörige dynamische System im 6-dimensionalen Phasenraum sieht so aus:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= m^{-1}\vec{p} \\ \dot{\vec{p}} &= -\gamma m M \frac{\vec{x}}{r^3}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun aus physikalischer Motivation den *Drehimpuls*

$$\vec{J}(\vec{x}, \vec{p}) := \vec{x} \times \vec{p}.$$

Dann ist

$$\frac{d}{dt}\vec{J}(\vec{x}, \vec{p}) = \dot{\vec{x}} \times \vec{p} + \vec{x} \times \dot{\vec{p}} = -m^{-1}\vec{p} \times \vec{p} - \vec{x} \times \left(\gamma m M \frac{\vec{x}}{r^3}\right) = \vec{0}.$$

Also ist der Drehimpuls \vec{J} auf jeder Phasenkurve konstant. Wegen $\vec{J} \perp \vec{x}$ liegt die Bahn in einer Ebene senkrecht zu \vec{J} . Und weil

$$\frac{1}{2m}\|\vec{J}\| = \frac{1}{2m}\|\vec{x} \times \vec{p}\| = \frac{1}{2}\|\vec{x} \times \dot{\vec{x}}\|$$

gerade die Fläche des Dreiecks mit Seiten \vec{x} und $\dot{\vec{x}}$ ist, überstreicht der Fahrstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Vgl. auch die Flächenformel

$$F = \frac{1}{2} \int (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))dt$$

aus der Analysis II.

Aus einem vektoriellem Integral der Bewegung, also eigentlich aus drei reellwertigen Erhaltungsgrößen, bekommt man bereits das 2. KEPLERSche Gesetz und die Tatsache, dass die Bahnen *ebene* Kurven sind. Aber anders als bei 2-dimensionalem Phasenraum ist damit das „Phasenporträt“ noch keineswegs festgelegt.

Zwischenrechnung. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\vec{J} \times \vec{p}) &= \underbrace{\dot{\vec{J}}}_{=0} \times \vec{p} + \vec{J} \times \dot{\vec{p}} = (\vec{x} \times \vec{p}) \times \dot{\vec{p}} = (\vec{x} \cdot \dot{\vec{p}})\vec{p} - (\vec{p} \cdot \dot{\vec{p}})\vec{x} \\ &= -\gamma m^2 M \left(\frac{\dot{\vec{x}}}{r} - \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}}{r^3} \vec{x} \right).\end{aligned}$$

Wenn man Erfahrung im Differenzieren von Vektorfeldern hat, kommt einem der Klammerausdruck bekannt vor:

$$\frac{d}{dt} \frac{\vec{x}}{r} = \frac{\dot{\vec{x}}}{r} - \frac{\vec{x}}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{\dot{\vec{x}}}{r} - \frac{\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}}{r^3} \vec{x}.$$

Wir definieren deshalb

$$\vec{A}(\vec{x}, \vec{p}) := \frac{\vec{J} \times \vec{p}}{\gamma m^2 M} + \frac{\vec{x}}{r}.$$

Dann ist auch \vec{A} eine Erhaltungsgröße.

Wir nehmen jetzt an, dass \vec{J} in Richtung der z -Achse zeigt. Dann liegen $\vec{J} \times \vec{p}$ und \vec{x} in der xy -Ebene. Also liegt auch \vec{A} in der xy -Ebene, und wir nehmen an, dass das konstante(!) \vec{A} in Richtung der positiven x -Achse zeigt. Wir schreiben $\vec{x} = r(\cos \phi, \sin \phi, 0)$ in Zylinderkoordinaten. Mit $\|\vec{A}\| =: \epsilon$ ist dann

$$\vec{A} \cdot \vec{x} = \epsilon r \cos \phi.$$

Andrerseits ist

$$\vec{A} \cdot \vec{x} = \frac{(\vec{J} \times \vec{p}) \cdot \vec{x}}{\gamma m^2 M} + r = -\frac{\vec{J} \cdot (\vec{x} \times \vec{p})}{\gamma m^2 M} + r = -\underbrace{\frac{\vec{J} \cdot \vec{J}}{\gamma m^2 M}}_{=: \eta} + r$$

Aus den beiden Gleichungen folgt

$$r(1 - \epsilon \cos \phi) = \eta.$$

Das ist die Polarkoordinaten-Gleichung eines Kegelschnitts mit Brennpunkt im Ursprung und für $\epsilon < 1$ eine Ellipse⁹. Um das zu sehen und ihre Achsen zu bestimmen, rechnen wir weiter:

$$r - r\epsilon \cos \phi = r - \epsilon x = \eta,$$

also

$$r = \epsilon x + \eta,$$

und nach Quadrieren

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \epsilon^2 x^2 + 2\epsilon \eta x + \eta^2 \\ x^2(1 - \epsilon^2) - 2\epsilon \eta x + y^2 &= \eta^2 \\ x^2 - 2\epsilon \underbrace{\frac{\eta}{1 - \epsilon^2}}_{=: a} x + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= \eta \frac{\eta}{1 - \epsilon^2} = \eta a = (1 - \epsilon^2) a^2 \\ (x - \epsilon a)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} &= (1 - \epsilon^2) a^2 + \epsilon^2 a^2 = a^2\end{aligned}$$

Nach Division mit a^2 folgt schließlich – falls $\epsilon < 1$ – die Gleichung für eine in Richtung der x -Achse verschobene Ellipse mit den Halbachsen a und $b = a\sqrt{1 - \epsilon^2}$:

$$\frac{(x - \epsilon a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - \epsilon^2)} = 1.$$

Damit ist das 1. KEPLERSche Gesetz bewiesen.

Ist T die Umlaufzeit, so ist die Fläche der Ellipse $F = T \frac{\|\vec{J}\|}{2m}$. Andererseits gilt für Ellipsen, dass $F = \pi ab$. Daher erhalten wir

$$\frac{T^2}{4m^2} \|\vec{J}\|^2 = \pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) = \pi^2 a^3 p \eta = \pi^2 a^3 \frac{\|\vec{J}\|^2}{\gamma m^2 M}.$$

Also

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3.$$

Das ist das 3. KEPLERSche Gesetz.

11.4 Die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Beispiel 89 (Wärmeleitung und Diffusion).

Verfahrenstechnik I, Kapitel 2 oder Energie-, Impuls- und Stofftransport, Abschnitt 2.5

Wir betrachten einen kompakten Bereich B in einem (wärmeisotropen) Medium und wollen darin die Veränderung der Temperatur in Abhängigkeit von Ort und Zeit beschreiben. (Dasselbe Modell beschreibt auch Diffusionsprozesse.) Damit leiten wir die früher betrachtete Wärmeleitungsgleichung her.

Die Gesamtenergie U in B ergibt sich durch Integration der spezifischen inneren Energie u multipliziert mit der Dichte ρ :

$$U = \iiint_B \rho u \, dx dy dz.$$

Die zeitliche Änderung $\frac{dU}{dt}$ der Gesamtenergie ist gleich dem gesamten Wärmefluß durch die Oberfläche in B hinein, daher das Minuszeichen:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_B \rho u \, dx dy dz = \iiint_B \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dx dy dz = - \iint_{\partial B} \dot{\vec{q}} \, d\vec{O}.$$

Mit dem Gaußschen Satz folgt

$$\iiint_B \rho \frac{\partial u}{\partial t} \, dx dy dz = - \iiint_B \operatorname{div} \dot{\vec{q}} \, dx dy dz. \quad (112)$$

Wählt man B als Kugel vom Radius r um einen festen Punkt und betrachtet den Grenzübergang für $r \rightarrow 0$, so folgt daraus

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \operatorname{div} \dot{\vec{q}}. \quad (113)$$

Nun ist die zeitliche Änderung der spezifischen Energie proportional zur Änderung der Temperatur θ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad c = \text{spezifische Wärmekapazität,}$$

und nach dem FOURIERSchen Gesetz ist der Wärmefluß proportional zum Gradienten der Temperatur: Die Wärme fließt in Richtung des steilsten Temperaturabfalls:

$$\vec{q} = -\lambda \operatorname{grad} \theta, \quad \lambda = \text{Wärmeleitfähigkeit.}$$

Einsetzen der beiden letzten Identitäten in (113) liefert wegen $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$ die Wärmeleitungsgleichung, die wir mit $D = \frac{\lambda}{c\rho}$ schreiben als

$$\boxed{\frac{\partial \theta}{\partial t} = D \Delta \theta.} \quad (114)$$

Diese Gleichung beschreibt also die raumzeitliche Änderung der Temperatur θ in einem wärmeleitenden homogenen und isotropen Medium.

11.5 Ein nicht-lineares Randwertproblem: Der Eulersche Knickstab

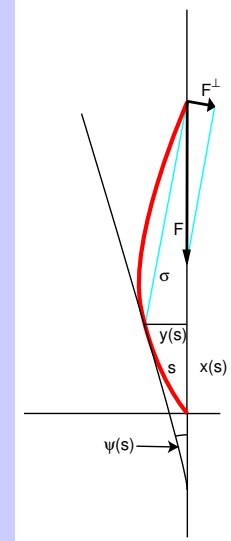
Bemerkung. Die Abbildungen in diesem Abschnitt wurden (bis auf die von Hand gezeichnete erste) mit Mathematica erzeugt. Für Hilfe dabei und bei den Jacobischen elliptischen Funktionen danke ich Ekkehard Tjaden.

Als Beispiel für ein nicht-lineares Randwertproblem untersuchen wir ein Standardproblem der klassischen Mechanik, ein Problem der Balkenbiegung, das etwas dramatisierend als Problem der ‘Eulerschen Stabknickung’ bezeichnet wird.

Gegeben sei ein vertikaler biegeelastischer Stab der Länge L , der vertikal mit der Kraft F belastet wird. Fuß und Spitze des Stabes sollen auf der Vertikalen und der Stab in einer Ebene bleiben. Wir verwenden als unabhängige Variable die vom Fuß aus gemessene Bogenlänge s auf dem Stab und bezeichnen mit $y(s)$ die horizontale Auslenkung. Weiter sei $\psi(s)$ der Steigungswinkel der Tangente an den Stab. Die Änderung dieses Winkels (oder die Krümmung des Stabes) ist nach der Mechanik proportional zum Biegemoment $M(s)$

$$\psi'(s) = -cM(s),$$

wobei $c = 1/EI$ eine von Material und Geometrie der Stabes bestimmte Konstante ist. EI heißt die *Biegesteifigkeit*.



Das Biegemoment ist gegeben durch das Drehmoment, welches die Kraft F im jeweiligen Punkt des Stabes ausübt, also durch das Produkt der Sehne σ mit der dazu senkrechten Komponente F^\perp der Kraft. Aus den beiden ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken der Skizze erhalten wir

$$\frac{F^\perp}{F} = \frac{y(s)}{\sigma}.$$

Es folgt

$$M(s) = F^\perp \sigma = F y(s)$$

und

$$\psi'(s) = -cF y(s). \quad (115)$$

Insbesondere ist nach Voraussetzung $y(0) = y(L) = 0$, also

$$\psi'(0) = 0, \quad \psi'(L) = 0. \quad (116)$$

Weil wir die Bogenlänge verwenden, ist $(x'(s), y'(s))$ der Einheitsvektor in Richtung der Tangente, und daher ist $y'(s) = \sin \psi(s)$. Zusammen mit den obigen physikalischen Beziehungen und der Abkürzung $\omega = \sqrt{cF}$ folgt daraus die Biegegleichung

$$\boxed{\psi''(s) + \omega^2 \sin \psi(s) = 0.} \quad (117)$$

Linearisierung. Für kleine Werte von ψ ist $\sin \psi \approx \psi$, und damit erhalten wir die Gleichung

$$\psi''(s) + \omega^2 \psi(s) = 0. \quad (118)$$

Für diese linearisierte Gleichung ist das Randwertproblem mit den Bedingungen (116) leicht zu lösen, es ist $\psi(s) = A \cos(\omega_n s)$ mit beliebigem (wegen der Approximationsvoraussetzung aber sehr kleinem) A und mit

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (119)$$

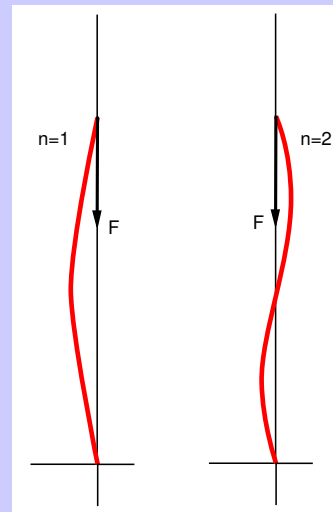
Also ist $y(s) = \int_0^s \sin \psi(\sigma) d\sigma \approx \int_0^s \psi(\sigma) d\sigma = \frac{A}{\omega_n} \sin(\omega_n s)$, und im Hinblick auf spätere Untersuchungen schreiben wir das als

$$y(s) = \frac{A}{\omega_n} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi}{L} s\right). \quad (120)$$

Der kleinste positive Wert von ω , für den eine nicht-triviale Lösung des Eigenwertproblems existiert ist also $\frac{\pi}{L}$, und das entspricht einer Belastung mit der Kraft

$$F = \frac{\omega^2}{c} = EI \frac{\pi^2}{L^2}.$$

Das ist die sogenannte *Eulersche Knicklast*. Weitere nichttriviale Lösungen hat man dann für $F = EI \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Sie entsprechen einer sinusartigen Biegung des Stabes mit n "Bögen".



Beachten Sie, dass s die Bogenlänge auf dem Stab bezeichnet, nicht die Höhe auf der vertikalen x -Achse, so dass die Stabkurve nicht einfach der Graph von (120) ist. Allerdings haben wir

$$x(s) = \int_0^s x'(\sigma) d\sigma = \int_0^s \sqrt{1 - y'(\sigma)^2} d\sigma \approx \int_0^s d\sigma = s.$$

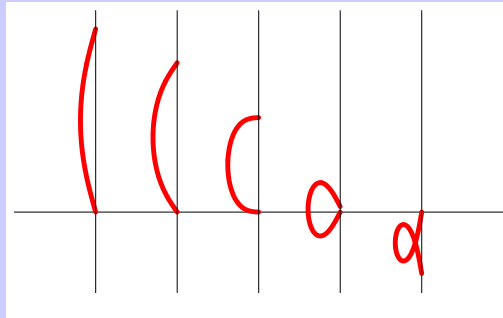
Die nicht-lineare Gleichung. Die oben betrachtete Linearisierung hat wenig mit der Realität zu tun, weil eben die Approximation $\sin \psi \approx \psi$ nur für sehr kleine ψ -Werte brauchbar ist und bei stärkerer Verbiegung unsinnig wird. Dann muss man die nicht-lineare Gleichung (117) betrachten. Diese ist schon im 19. Jahrhundert sehr gründlich studiert worden, zumal sie gleichzeitig die Schwingung eines ebenen Pendels beschreibt (Gleichung des sogenannten *mathematischen Pendels*).

Wir möchten das Randwertproblem (116), (117) lösen, betrachten aber zunächst einmal ein Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \psi'' + \omega^2 \sin \psi &= 0, \\ \psi(0) &= \alpha, \quad \psi'(0) = 0. \end{aligned} \quad (121)$$

Später versuchen wir dann α so zu wählen, dass $\psi'(L) = 0$ wird.

Weil die Sinusfunktion stetig differenzierbar ist, ist (121) eindeutig lösbar. Andererseits ist die Differentialgleichung nicht-linear, und deshalb hilft kein Exponentialansatz beim Lösen der Differentialgleichung und kein Superpositionsprinzip¹⁰ bei der Erfüllung der Randbedingungen, man braucht andere Methoden. Diese liefern Lösungen, die nicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden können, sondern man braucht sogenannte *elliptische Funktionen*. Wir beschreiben zunächst das Ergebnis. Für $0 \leq \omega \leq \omega_1$, d.h. für eine Belastung unterhalb der Eulerschen Knicklast, hat auch das nicht-lineare Problem nur die triviale Lösung, der Stab bleibt gerade. Für $\omega > \omega_1$ gibt es zunächst eine weitere Lösung, die der anschaulichen Vorstellung einer (annähernd sinusförmigen) Verbiegung des Stabes entspricht. Bei wachsendem ω , also steigender Belastung wird die maximale Auslenkung y_{max} des Stabes immer größer.

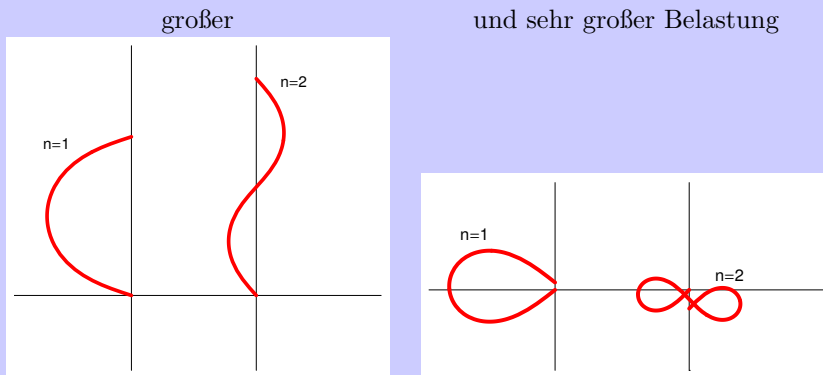


(122)

Im letzteren Bild hat die Kraft das ehemals obere Stabende unter den Fußpunkt des Stabes gedrückt und zieht nun nach unten.

Aber bei $\omega_2 = \frac{2\pi}{L}$, dem 2. Eigenwert des *linearisierten* Problems, gibt es daneben eine (physikalisch instabile) weitere nicht-triviale Lösung, die zunächst annähernd einer vollen Sinusperiode entspricht, also zwei "Bäuche" besitzt. Bei weiter steigender Belastung vergrößern sich auch die Bäuche dieser Lösung. Bei weiter wachsendem ω kommt bei jedem ω_n eine weitere nicht-triviale Lösung mit einem weiteren Bauch hinzu.

Hier sind jeweils zwei nicht-triviale Lösungen bei gleicher



Im nicht-linearen Fall hat man also im Gegensatz zum homogenen linearen Fall nicht diskrete Eigenwerte mit jeweils einem Vektorraum von Eigenlösungen, sondern ein Kontinuum von "Spektralwerten" ω mit jeweils einer diskreten Zahl zugehöriger nicht-trivialer Lösungen.

Lösung der nicht-linearen Gleichung. Der wesentliche Trick zur Lösung ist die Multiplikation mit ψ' :

$$0 = \psi' \psi'' + \omega^2 \psi' \sin \psi = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} (\psi')^2 - \omega^2 \cos \psi \right).$$

Also hat man

$$\frac{1}{2} (\psi')^2 - \omega^2 \cos \psi = \text{const.}$$

Aus der Anfangsbedingung (121) folgt $\text{const} = -\omega^2 \cos \psi(0) = -\omega^2 \cos \alpha$ und wir erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} (\psi')^2 = \omega^2 (\cos \psi - \cos \alpha) = 2\omega^2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2} \right). \quad (123)$$

Separation der Variablen liefert

$$\frac{\psi'}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\psi}{2}}} = -2\omega. \quad (124)$$

Beim Wurzelziehen haben wir uns inspiriert von der Abbildung für das Minuszeichen entschieden, aber das muss man im Augen behalten. Für die Integration der linken Seite substituieren wir eine neue Variable u für ψ mit

$$\sin u = \frac{\sin \psi/2}{\sin \alpha/2}.$$

Wir halten fest, dass dann $\sin u(0) = 1$, also o.E. $u(0) = \frac{\pi}{2}$.

Dann wird $\psi' = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\cos u}{\cos \psi/2} u'$ und wir erhalten

$$-2\omega = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\cos u}{\cos \psi/2} u'}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} = \frac{2u'}{\cos \frac{\psi}{2}} = \frac{2u'}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} = 2 \frac{d}{dt} F(k; u). \quad (125)$$

Dabei ist $k := \sin \frac{\alpha}{2}$ und

$$F(k; \phi) := \int_0^\phi \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}}$$

das sogenannte *elliptische Integral 1. Art*, das mit den von der Schule bekannten elementaren Funktionen nicht lösbar ist und darum eine neue Funktion darstellt. Das Semikolon soll andeuten, dass wir F nicht als Funktion von zwei Variablen k und ϕ interpretieren (was natürlich auch richtig ist), sondern als Funktion einer Variablen ϕ , wobei die Funktion noch von einem Parameter k abhängt, so dass wir eigentlich über eine Familie von Funktionen reden.

Diese Funktionen kann man als Beginn einer wunderbaren Reihe neuer Funktionen, der *elliptischen Funktionen*, auffassen, die sich sämtlich mit einfachsten Methoden der Analysis I erklären lassen. Hier stellen wir zusammen, was wir darüber für das Eulersche Knickstab-Problem wissen müssen.

Intermezzo: Die elliptischen Funktionen von Jacobi.

Der Integrand von

$$F(k; \phi) := \int_0^\phi \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \quad (126)$$

ist π -periodisch und zu $\frac{\pi}{2}$ symmetrisch. Man nennt deshalb

$$K(k) := F(k; \frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} \quad (127)$$

das *vollständige elliptische Integral 1. Art*. Damit folgt

$$F(k; \phi + \pi) = F(k; \phi) + 2K(k). \quad (128)$$

Offenbar ist die Funktion K monoton steigend, und mit Hilfe von

$$\int_0^b \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \sin^2 \tau}} = 2 \tanh^{-1}(\tan \frac{b}{2}), \quad 0 < b < \pi,$$

beweist man $\lim_{k \nearrow 1} K(k) = +\infty$.

Weiter ist F in ϕ monoton wachsend und besitzt eine Umkehrfunktion, die sogenannte *Jacobische Amplitude* $\text{am}(k; t)$:

$$\text{am}(k; F(k, \phi)) = \phi. \quad (129)$$

Aus der Periodizität (128) folgt

$$\text{am}(k; t + 2K(k)) = \text{am}(k; t) + \pi \quad (130)$$

und insbesondere $\text{am}(k; nK(k)) = n\frac{\pi}{2}$.

Die *Jacobischen Kosinus-* bzw. *Sinusfunktionen* werden definiert durch

$$\text{cn}(k; t) := \cos \text{am}(k; t), \quad \text{sn}(k; t) := \sin \text{am}(k; t). \quad (131)$$

Weil $F(0; \phi) = \phi$ und deshalb $\text{am}(k; t) = t$ ist, ist

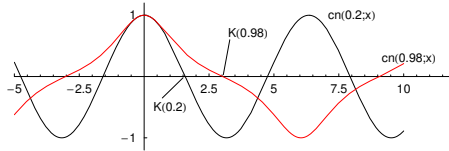
$$\text{cn}(0; t) = \cos t, \quad \text{sn}(0; t) = \sin t.$$

Die Jacobischen Funktionen sind also Verallgemeinerungen des üblichen Kosinus und Sinus. Dabei übernimmt $K(k)$ die Rolle von $\frac{\pi}{2} = K(0)$. Die Funktionen sind nach (130) periodisch mit der Periode $4K(k)$ und haben Nullstellen bei $nK(k)$ für ungerades bzw. gerades $n \in \mathbb{Z}$.

Schließlich können Sie mit der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion aus der Analysis I leicht nachrechnen, dass

$$\text{sn}'(k; t) = \text{cn}(k; t) \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(k; t)}, \quad \text{cn}'(k; t) = -\text{sn}(k; t) \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(k; t)}. \quad (132)$$

Die Graphen von zwei der Jacobischen Kosinusfunktionen geben ein anschauliches Bild:



Zurück zu unserem mechanischen Problem. Aus (125) erhalten wir

$$F(k; u(s)) = F(k; u(0)) - \omega s = K(k) - \omega s,$$

damit

$$u(s) = \operatorname{am}(k; K(k) - \omega s)$$

und schließlich

$$\boxed{\psi(s) = 2 \arcsin(k \sin u) = 2 \arcsin(k \operatorname{sn}(k; K(k) - \omega s))}. \quad (133)$$

Mit (132) verifiziert man, dass das wirklich die Differentialgleichung löst, und damit ist auch das Vorzeichenproblem in (124) erledigt. Die Funktion (133) ist also die Lösung des Anfangswertproblems

$$\psi'' + \omega^2 \psi = 0, \quad \psi(0) = \alpha, \psi'(0) = 0 \quad (134)$$

mit $k := \sin \frac{\alpha}{2}$.

Randwert adjustieren. Für gegebenes L und hinreichend großes ω müssen wir nun ein oder mehrere nicht-triviale k bzw. α finden, so dass $\psi'(L) = 0$ wird, vgl. (116). Nach (123) ist

$$\begin{aligned} (\psi'(L))^2 &= 4\omega^2 \left(k^2 - \sin^2 \frac{\psi(L)}{2} \right) \\ &= 4\omega^2 \left(k^2 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(k; K(k) - \omega L) \right) \\ &= 4\omega^2 k^2 \cos^2 \operatorname{am}(k; K(k) - \omega L) \\ &= 4\omega^2 k^2 \operatorname{cn}^2(k; \omega L - K(k)) \quad (\operatorname{cn} \text{ ist eine gerade Funktion}). \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $\operatorname{cn}(k; s)$ waren aber die ungeraden Vielfachen von $K(k)$, und deshalb sind unsere Randbedingungen erfüllt für

$$\omega L - K(k) = L\sqrt{cF} - K(k) = (2n - 1)K(k), \quad n \in \mathbb{Z},$$

oder

$$K(k) = \frac{L\sqrt{cF}}{2n}. \quad (135)$$

Wir haben festgestellt, dass $K : [0, 1[\rightarrow [\frac{\pi}{2}, +\infty[$ bijektiv ist. Deshalb gibt es für (135) und damit für unser Randwertproblem so viele nicht-triviale Lösungen, wie es positive ganze Zahlen n gibt, für die

$$\frac{\pi}{2} < \frac{L\sqrt{cF}}{2n}$$

ist. Wie im linearen Fall sind also die Belastungen mit $\sqrt{cF} = \omega = \frac{n\pi}{L}$, die sogenannten *Verzweigungswerte* von besonderer Bedeutung, aber anders als dort hat man jetzt für *alle* Werte von $\sqrt{cF} > \frac{n\pi}{L}$ eine Familie von n nicht-trivialen Lösungen

$$\psi_j(s) = 2 \arcsin \left(k_j \operatorname{sn} \left(k_j; K(k_j) - s\sqrt{cF} \right) \right)$$

charakterisiert durch $K(k_j) = \frac{L\sqrt{cF}}{2j}$ mit $1 \leq j \leq n$.

Bisher haben wir nur den Tangentenwinkel ψ berechnet. Um ein Bild der tatsächlichen Gestalt zu bekommen, müssen wir $x(s), y(s)$ bestimmen. Aus (115) und (124) ergibt sich

$$\begin{aligned} y(s) &= -\frac{1}{cF} \psi'(s) = \frac{2}{\sqrt{cF}} \sqrt{k^2 - k^2 \operatorname{sn}^2(k; K(k) - \omega s)} \\ &= \frac{2k}{\sqrt{cF}} \operatorname{cn}(k; K(k) - \omega s). \end{aligned}$$

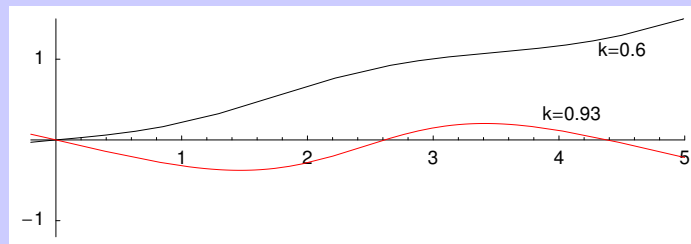
(Bemerkung: Hier haben wir wieder das alte Problem mit dem Vorzeichen der Wurzel. Die Berechnung von $y(s)$ durch Integration von $y'(s) = \sin \psi(s)$ vermeidet das und liefert dasselbe Ergebnis.) Daran sieht man insbesondere, dass die j -te Lösung kosinusförmig schwingt und j "Bäuche" hat.

Die Berechnung von $x(s)$ durch Integration von $x'(s) = \cos \psi(s)$ ist etwas komplizierter. Sie erfordert ein weiteres elliptisches Integral, das Integral $E(k; \phi)$ von 2. Art, auf das ich hier aber nicht mehr eingehen will, und liefert

$$x(s) = \frac{2}{\omega} \left(E(k; \operatorname{am}(k; \omega s - K(k))) - \frac{1}{2} \omega s + E(k, \frac{\pi}{2}) \right).$$

Für $k = 0$ ist $x(s) = s$, und für kleine Werte von k ist $x(s)$ monoton wachsend. Das gilt aber nicht mehr für k -Werte nahe bei 1, und dann wird $x(s)$ rückläufig wie in den beiden letzten Figuren der Abbildung (122).

Hier sind die Graphen für zwei Werte von k :



Mit dieser (x, y) -Parametrisierung bekommt man die oben abgebildeten und beschriebenen Verbiegungen des Stabes.

11.6 Der Verlauf der Zylinderfunktionen

Wir wollen nun Informationen über den Funktionsverlauf der Lösungen von (90) sammeln. Dazu vergleicht man die BESSELgleichung mit einer Differentialgleichung, die man gut kennt, nämlich mit der Sinusgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0. \quad (136)$$

Wir benutzen – ohne das im Detail auszuführen – dass sich die Lösungen ähnlicher Differentialgleichungen ähnlich verhalten. Zunächst ist allerdings zwischen (90) und (136) gar keine Ähnlichkeit festzustellen. Wir müssen zunächst die BESSELgleichung noch ein wenig umformulieren.

Wir betrachten den Bereich $x > 0$. Wir nehmen an, dass y eine Lösung der BESSELgleichung zum Index λ ist, nehmen eine Funktion $m > 0$, über die wir gleich noch verfügen werden, und schreiben $y(x) = m(x)v(x)$. Wir setzen das in (90) ein und erhalten nach kurzer Rechnung

$$x^2 m v'' + (2x^2 m' + x m) v' + (x^2 m'' + x m' + (x^2 - \lambda^2) m) v = 0. \quad (137)$$

Wir wählen nun m so, dass der Faktor von v' verschwindet, also so, dass $2x^2 m' + x m = 0$. Das ist eine Differentialgleichung für m die man auch schreiben kann als $\frac{m'}{m} = -\frac{1}{2x}$. Nun ist $\frac{m'}{m} = (\ln m)'$ und $-\frac{1}{2x} = -(\ln \sqrt{x})'$. Also ist $m(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$ eine Lösung, bis auf eine multiplikative Konstante auch die einzige. Einsetzen in (137) und teilen durch $x^2 m(x)$ liefert

$$v'' + \left(1 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2}\right) v = 0. \quad (138)$$

Ist v eine Lösung von (138), so ist $y(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}$ eine solche von (90) und umgekehrt.

Das vorstehende Verfahren kann man auf jede homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung anwenden. Man erhält eine Gleichung (138) von der Form

$$v'' + B(x)v = 0.$$

Die Funktion B ist eine charakteristische Invariante für den Typ der Differentialgleichung. Erhält man für verschiedene Differentialgleichungen dasselbe B , so lassen sich ihre Lösungen durch einen festen multiplikativen Faktor ineinander umrechnen.

Die Gleichung (138) ist also äquivalent zur BESSELgleichung, und sie sieht der Sinusgleichung (136) wirklich sehr ähnlich. Der STURMSche Vergleichssatz besagt, dass sich die Lösungen von (138) für großes x , wenn also $\left(1 - \frac{\lambda^2 - 1/4}{x^2}\right) \approx 1$ ist, so verhalten, wie die Lösungen von (136) mit $\omega = 1 - \epsilon$ für sehr kleines positives ϵ . Diese Lösungen sind aber $\sin \omega(t - t_0)$.

Wir erinnern daran, dass $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}v(x)$ die Lösungen der BESSELgleichung sind und fassen das asymptotische Verhalten (d.h. das Verhalten für große x) so zusammen:

Die Zylinderfunktionen verhalten sich asymptotisch wie eine Sinusfunktion mit Phase und einer wie $\frac{1}{\sqrt{x}}$ gedämpften Amplitude.

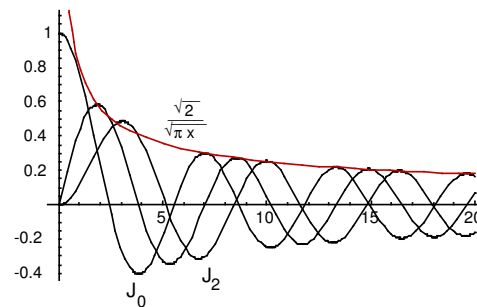
Man kann das noch präzisieren, wenn man die Zylinderfunktion präzisiert. Für die BESSELfunktionen ergibt sich

$$J_\lambda(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\lambda + \frac{\pi}{4}\right).$$

Das Mathematica-Programm hat die BESSELfunktionen „vorrätig“. Mit

```
In[1]:=Plot[{BesselJ[0,x],BesselJ[1,x],BesselJ[2,x]},{x,0,10}]
```

erhält man



11.7 Die allgemeine Lösung der Besselgleichung

Da die BESSELgleichung (90) von zweiter Ordnung ist, braucht man für die allgemeine Lösung ein Fundamentalsystem mit *zwei* linear unabhängigen Lösungen. Wir beschreiben nun, wie man eine zweite, von J_λ linear unabhängige Lösung finden kann.

Dazu untersuchen wir zunächst das Verhalten der BESSELFunktionen für $x \searrow 0$. Aus der Reihenentwicklung

$$J_\lambda(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda \left(\frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\lambda+1)} - \dots \right)$$

sieht man

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda > 0 \\ 1 & \text{für } \lambda = 0 \\ \pm\infty & \text{für } \lambda < 0, \text{ nicht ganzzahlig.} \end{cases} \quad (139)$$

Ist λ nicht ganzzahlig, so sind J_λ und $J_{-\lambda}$ zwei Lösungen *derselben* Gleichung (90), die wegen (139) ganz offensichtlich linear unabhängig sind. Damit wäre das Problem erledigt, wenn man nicht gerade an ganzzahligem λ besonders interessiert wäre. In diesem Fall sind aber J_λ und $J_{-\lambda} = (-1)^\lambda J_\lambda$ linear abhängig, und man muß sich etwas anderes einfallen lassen.

Sind nun $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$, so sind für $\lambda \notin \mathbb{Z}$ auch J_λ und

$$aJ_\lambda + bJ_{-\lambda}$$

linear unabhängig. Zum Beispiel kann man folgende skurrile Koeffizientenwahl treffen:

$$a := \cot(\lambda\pi), \quad b := -\frac{1}{\sin(\lambda\pi)}. \quad (140)$$

Dann ist

$$J_\lambda \quad \text{und} \quad N_\lambda := \frac{\cos(\lambda\pi)J_\lambda(x) - J_{-\lambda}(x)}{\sin(\lambda\pi)}$$

ein Fundamentalsystem von (90).

Die N_λ heißen die *Neumannfunktionen* oder *BESSELFunktionen 2. Art*. Sie werden auch mit dem Symbol

$$Y_\lambda(x) = N_\lambda(x)$$

bezeichnet.

Der Grund für die merkwürdige Wahl der Koeffizienten in (140) ist nun, dass für ganzzahliges k der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \rightarrow k} N_\lambda(x)$$

existiert und J_k, N_k auch dann noch ein Fundamentalsystem bilden. Wir verdeutlichen das an einem einfachen Beispiel, welches allerdings nichts mit den BESSELFunktionen zu tun hat:

Beispiel 90. Die Differentialgleichung

$$y'' - 2y + (1 - \lambda^2)y = 0$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\mu^2 - 2\mu + (1 - \lambda^2) = 0$$

mit den Nullstellen

$$\mu_{1,2} = 1 \pm \lambda.$$

Sie hat daher für $\lambda \neq 0$ eine Lösungsbasis

$$y_1(x) = e^{(1+\lambda)x}; \quad y_2(x) = e^{(1-\lambda)x}.$$

Für $\lambda > 0$ können wir stattdessen aber auch die Lösungsbasis

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{(1+\lambda)x}, \\ y_2(x) &= \frac{1}{2\lambda} e^{(1+\lambda)x} - \frac{1}{2\lambda} e^{(1-\lambda)x} \\ &= e^x \frac{e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}}{2\lambda} = e^x \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} \end{aligned}$$

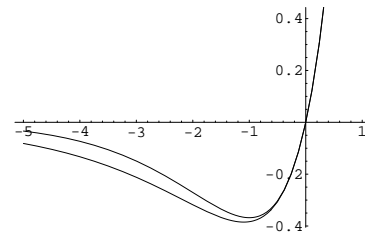
verwenden.

Geht λ gegen 0, so rücken die beiden Nullstellen zusammen gegen eine doppelte Nullstelle $\mu_{1,2} = 1$. Die Lösung $y_1(x)$ geht offensichtlich gegen e^x . Nach der Regel von de l'Hospital ist aber

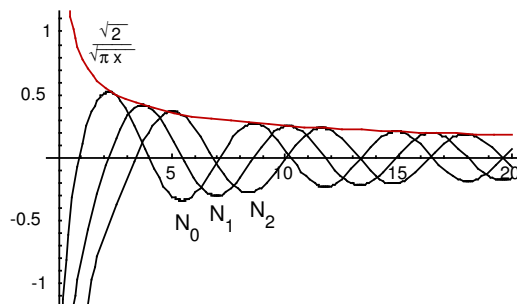
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sinh \lambda x}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x \cosh \lambda x}{1} = x,$$

und daher geht die zweite Lösung gegen $x e^x$.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Graphen von $x e^x$ und $y_2(x)$ für $\lambda = 0.5$.



Wegen der Singularität in 0 sind die Neumannschen Funktionen in den Anwendungen weit seltener als die BESSELSchen. Ihre Graphen sehen so aus:



□

11.8 Die erzeugende Funktion der ganzzahligen Besselfunktionen

Wir betrachten die vereinfachte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (141)$$

Sie hat beschränkte Lösungen

$$u_k(\rho, \phi, t) = J_k(\rho\omega) e^{i(k\phi + \omega t)},$$

vgl. Abschnitt 8.5. Das k muß ganzzahlig sein, damit die Lösung u_k in der Winkelkoordinate ϕ die Periode 2π bekommt. Nach der allgemeinen Theorie kann man jede Lösung von (141) durch Superposition (=Linearkombination) „separierter“ Lösungen erhalten, also auch die Ebene-Wellen-Lösung mit harmonischem Profil:

$$u_E(x, y, t) = e^{i(y+t)} = e^{i(\rho \sin \phi + t)}.$$

Das ist vielleicht doch überraschend, weil die Ebene-Wellen-Lösung von ganz anderer Gestalt zu sein scheint, als die „Polarkoordinaten-Lösungen“. Offenbar muß $\omega = 1$ sein. Wir erwarten also eine Darstellung der Form

$$e^{i\rho \sin \phi} e^{it} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k J_k(\rho) e^{ik\phi} e^{it}.$$

Zu bestimmen sind die c_k . Den Faktor e^{it} kann man kürzen. Dann ergibt sich das Problem, für festes ρ die 2π -periodische Funktion $e^{i\rho \sin \phi}$ in eine komplexe FOURIERREIHE zu entwickeln. Das machen wir allerdings nicht mit der Formel für die FOURIERKOEFFIZIENTEN, sondern wir benutzen unsere Kenntnis der Exponentialreihe. Wir setzen $e^{i\phi} = z$. Dann ist $i \sin \phi = \frac{1}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{z})$ und

$$\begin{aligned} e^{i\rho \sin \phi} &= e^{\frac{\rho}{2}z} e^{-\frac{\rho}{2}\frac{1}{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{\rho}{2})^m}{m!} z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\rho}{2})^n}{n!} z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m-n=k \\ m, n \geq 0}} \frac{(-1)^n (\frac{\rho}{2})^{m+n}}{m!n!} \right) z^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+k)!n!} (\frac{\rho}{2})^{2n} (\frac{\rho}{2})^k \right)}_{=J_k(\rho)} z^k \end{aligned} \quad (142)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho) e^{ik\phi}. \quad (143)$$

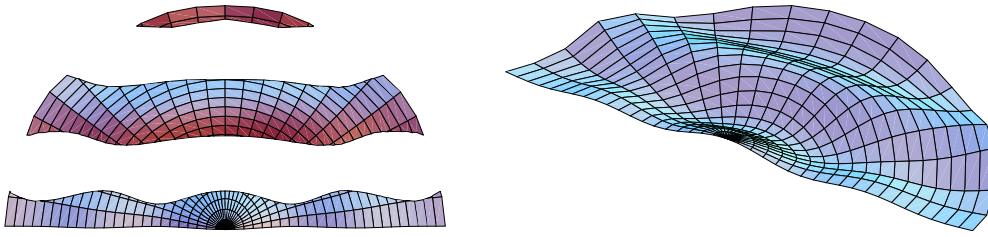
(Auf der rechten Seite von (142) darf die Summe über n eigentlich erst bei $\min(-k, 0)$ beginnen, weil $m = n + k$ positiv sein muß. Aber wir interpretieren $\frac{1}{(n+k)!} = \frac{1}{\Gamma(n+k+1)} = 0$, falls $n + k < 0$. Genauso hatten wir früher die J_k für negatives k definiert.)

Überraschenderweise sind also die $c_k = 1$ für alle k , und wir erhalten

$$e^{i(y+t)} = e^{it} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho) e^{ik\phi}. \quad (144)$$

Man nennt die Funktion $e^{\frac{\rho}{2}(z - \frac{1}{z})} = e^{i\rho \sin \phi}$, deren Potenzreihe die BESSELFUNKTIONEN als Koeffizienten hat, auch die *erzeugende Funktion* für die ganzzahligen BESSELFUNKTIONEN und die

ganzzahligen Funktionen *BESSELkoeffizienten*. Die nachstehende Bilder geben den Graphen von Partialsummen der rechten Seite (mit $t = 0$) wieder, einmal in Draufsicht mit „Clipping“, wie im Abschnitt 8.5, und einmal in einer schrägen Ansicht.



Wir haben die Formel (144) aus zwei Gründen hergeleitet:

- Sie ist ein schönes Beispiel für die Gewinnung spezieller Lösungen durch Linearkombination von mit Separationsansatz gewonnenen „Fundamentallösungen“.
- Aus der Formel (144) lassen sich sehr einfach wichtige Beziehungen zwischen den ganzahligen *BESSEL*funktionen gewinnen. Das machen wir nun vor.

Wir differenzieren

$$e^{\frac{\rho}{2}(x-\frac{1}{x})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho)x^k \quad (145)$$

nach ρ und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J'_k(\rho)x^k &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{\rho}{2}(x-\frac{1}{x})} = \frac{1}{2}x \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho)x^k - \frac{1}{2x} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\rho)x^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}J_k(\rho)x^{k+1} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}J_k(\rho)x^{k-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(J_{k-1}(\rho) - J_{k+1}(\rho))x^k. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$\boxed{2J'_k = J_{k-1} - J_{k+1}.} \quad (146)$$

Differentiation nach x liefert mit einer ähnlichen Rechnung

$$\boxed{\frac{2k}{\rho}J_k(\rho) = J_{k+1}(\rho) + J_{k-1}(\rho).} \quad (147)$$

Aus beiden Gleichungen zusammen ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$\boxed{\frac{d}{d\rho}(\rho^k J_k(\rho)) = \rho^k J_{k-1}(\rho).} \quad (148)$$

Zahlreiche weitere Identitäten für die *BESSEL*- und *Zylinderfunktionen* finden Sie in der Literatur, zum Beispiel in dem ausgezeichneten Buch „An Atlas of Functions“ von Spanier und Oldham, Springer Verlag, oder in Büchern zum Thema „Spezielle Funktionen (der mathematischen Physik)“.

11.9 Die Legendresche Differentialgleichung

Die Separation der **Potentialgleichung**

$$\Delta u = 0$$

in Kugelkoordinaten liefert Lösungen der Form

$$u(r, \theta, \phi) = r^k y(\cos \theta) e^{\pm im\phi},$$

wenn y eine Lösung der allgemeinen oder zugeordneten (assozierten) Legendreschen Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y'' + 2xy' + \left(\frac{m^2}{1 - x^2} - k(k + 1) \right) y = 0 \quad (149)$$

ist. Vergleichen Sie dazu den Abschnitt 8.5 und rechnen Sie das nach. Man kann zeigen, dass die Separationskonstanten m und k natürliche Zahlen mit $m \leq k$ sein müssen, wenn die Lösungen im Raum wohldefiniert und singularitätenfrei sein sollen. Ganz ähnlich bekommt man Lösungen der **Wellengleichung** oder der **Wärmeleitungsgleichung** in Kugelkoordinaten, vgl. Abschnitt 8.5.

Für $m = 0$ erhält man Lösungen, die unabhängig von ϕ , also rotationssymmetrisch um die z -Achse sind. Das ist physikalisch betrachtet ein sehr spezieller Fall, der aber mathematisch von besonderer Wichtigkeit ist. Aus den Lösungen der sehr viel einfacheren $m = 0$ -Legendregleichung, der Legendregleichung im engeren Sinne

$$\boxed{(x^2 - 1)y'' + 2xy' - k(k + 1)y = 0} \quad (150)$$

erhält man nämlich auch die Lösungen der Gleichung (149), die sogenannten *zugeordneten Legendrefunktionen* durch eine sehr einfache Formel. Wir gehen darauf aber nicht ein. Im Gegensatz zur Besselgleichung liefert hier ein reiner Potenzreihenansatz Lösungen, die bei geeigneten Anfangswerten sogar Polynome sind. Wir benutzen im folgenden aber eine andere Methode, die vielleicht weniger motiviert ist, dafür aber den Rechenaufwand stark reduziert. Wir werden nämlich rekursiv aus Lösungen der k -ten Legendregleichung solche der $k + 1$ -ten machen.

Wir schreiben (150) in der Form

$$((x^2 - 1)y')' = k(k + 1)y. \quad (151)$$

Beispiel 91 (Der Fall $k = 0$). Die konstante Funktion

$$y(x) = P_0(x) := 1 \quad (152)$$

ist offenbar eine Lösung für $k = 0$, weil dann $y' = 0$ ist. Die homogene lineare Gleichung hat aber noch eine davon unabhängige Lösung. Mit der Kettenregel zeigt man leicht, dass $\frac{d}{dx} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2}$ auf dem Intervall $] -1, +1[$. Daher ist auch

$$y(x) = Q_0(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (153)$$

eine offenbar von P_0 linear unabhängige Lösung auf dem Intervall $] -1, +1[$. \square

11.9.1 Konstruktion von Lösungen für $k > 0$ durch Rekursion.

Es gelte

$$((x^2 - 1)y'_k)' = k(k + 1)y_k. \quad (154)$$

Definiere

$$y_{k+1} := \frac{x^2 - 1}{k + 1} y'_k + xy_k. \quad (155)$$

Dann folgt

$$y'_{k+1} = \frac{1}{k + 1} k(k + 1)y_k + y_k + xy'_k = (k + 1)y_k + xy'_k \quad (156)$$

und damit

$$\begin{aligned} ((x^2 - 1)y'_{k+1})' &= (k + 1)2xy_k + (k + 1)(x^2 - 1)y'_k + (x^2 - 1)y'_k + x((x^2 - 1)y'_k)' \\ &= (k + 2)(x^2 - 1)y'_k + (k + 1)(k + 2)xy_k \\ &= (k + 1)(k + 2) \left(\frac{x^2 - 1}{k + 1} y'_k + xy_k \right) \\ &= (k + 1)(k + 2)y_{k+1}. \end{aligned}$$

Also löst y_{k+1} die "nächste" Legendregleichung. Ausgehend von einer Lösung für $k = 0$, etwa einer der oben gefundenen, erhält man so rekursiv Lösungen für jedes k . Es ist nicht schwer zu zeigen, dass diese Lösungen nicht-trivial sind, wenn man mit einer nicht-trivialen beginnt.

Eine andere Formulierung für die Rekursion. Elimination der Ableitungen aus (156) mittels (155) liefert

$$\frac{k + 2}{x^2 - 1} (y_{k+2} - xy_{k+1}) = (k + 1)y_k + x \frac{k + 1}{x^2 - 1} (y_{k+1} - xy_k)$$

und daraus

$$(k + 2)y_{k+2} = (2k + 3)xy_{k+1} - (k + 1)y_k$$

oder

$$(k + 1)y_{k+1} = (2k + 1)xy_k - ky_{k-1}. \quad (157)$$

11.9.2 Die Legendrepolynome oder Legendrefunktionen 1. Art

Diese sind definiert durch die sogenannte Formel von Rodrigues

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} D^k (x^2 - 1)^k, \quad (158)$$

wobei $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ gesetzt ist. $P_0 = 1$ haben wir oben schon kennengelernt. P_k ist ein Polynom vom Grad k und je nach der Parität von k gerade oder ungerade.

Wir zeigen jetzt, dass die P_k die Rekursion (155) erfüllen, also Lösungen der Legendregleichungen liefern. Dafür müssen wir zeigen, dass

$$\frac{1}{2^{k+1}(k+1)!} D^{k+1} (x^2 - 1)^{k+1} = \frac{x^2 - 1}{k+1} \frac{1}{2^k k!} D^{k+1} (x^2 - 1)^k + x \frac{1}{2^k k!} D^k (x^2 - 1)^k$$

oder

$$\frac{1}{2} D^{k+1} (x^2 - 1)^{k+1} = (x^2 - 1) D^{k+1} (x^2 - 1)^k + (k+1)x D^k (x^2 - 1)^k. \quad (159)$$

Nun ist einerseits

$$\begin{aligned} D^{k+1} (x^2 - 1)^{k+1} &= D^{k+1} ((x^2 - 1)(x^2 - 1)^k) \\ &= (x^2 - 1) D^{k+1} (x^2 - 1)^k + (k+1) 2x D^k (x^2 - 1)^k \\ &\quad + \binom{k+1}{2} 2 D^{k-1} (x^2 - 1)^k \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} D^{k+1} (x^2 - 1)^{k+1} &= D^k (2x(k+1)(x^2 - 1)^k) \\ &= 2(k+1)x D^k (x^2 - 1)^k + 2k(k+1) D^{k-1} (x^2 - 1)^k. \end{aligned}$$

Subtrahiert man die Hälfte dieser Gleichung von der vorangehenden, so erhält man (159).

Damit erfüllen die Legendrepolynome die Rekursion, also ist das Polynom P_k eine Lösung der k -ten Legendregleichung. Diese Lösungen bekommt man also, wenn man die Rekursion mit $y_0 = P_0 = 1$ startet.

Beispiel 92. Mit den Rekursionsformeln berechnet man

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned}$$

□

11.9.3 Funktionsverlauf der Legendrefunktionen

Aus der Rodriguesformel (158) sieht man, dass P_k für gerades k gerade und für ungerades k ungerade ist.

$$P_k(-x) = (-1)^k P_k(x). \quad (160)$$

Insbesondere ist

$$P_{2m+1}(0) = 0. \quad (161)$$

Aus (155) folgt

$$P_{k+1}(1) = P_k(1) = \dots = P_0(1) = 1,$$

also

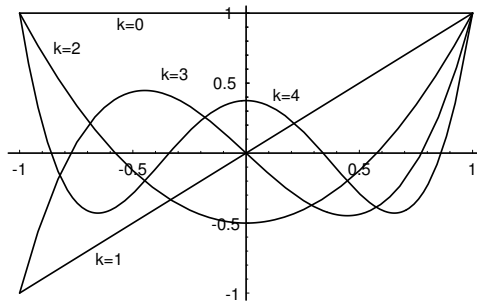
$$P_k(1) = 1, \quad P_k(-1) = (-1)^k. \quad (162)$$

Weiter gilt

P_k hat im Intervall $] -1, +1[$ genau k verschiedene Nullstellen.
Die Nullstellen von P_k und P_{k+1} trennen sich gegenseitig.

Mathematica-Plots der Funktionsverläufe von P_k und Q_k sehen so aus:

```
Plot[{LegendreP[0,x],LegendreP[1,x], LegendreP[2,x],LegendreP[3,x],
LegendreP[4,x] },{x,-1,1}]
```



Das Bild suggeriert

$$|P_k(x)| \leq 1,$$

und das kann man wirklich für alle k beweisen-

11.9.4 Entwicklung nach Legendrepolynome

Für die Entwicklung nach Legendrefunktionen sind die Orthogonalitätsrelationen wichtig. Es gilt

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x)P_l(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das beweist man wie im Abschnitt 10.1.2. Durch Substitution $x = \cos \theta$ erhält man eine Version, die zur Verwendung mit Kugelkoordinaten handlicher ist:

$$\int_0^\pi P_k(\cos \theta)P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} & \text{für } k = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 93. Wir haben zu Beginn des Abschnitts über die Legendregleichung gesehen, dass die Funktionen $r^k P_k(\cos \theta)$ bezüglich der z -Achse rotationsymmetrische Lösungen der Potentialgleichung $\Delta u = 0$ sind. Dann sind aber auch Linearkombinationen der Form

$$u(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(\cos \theta) r^k$$

Lösungen dieser Gleichung.

Will man Randbedingungen $u(R, \theta) = u_R(\theta)$ auf der Kugel vom Radius R vorgeben, so muss man also eine Entwicklung

$$u_R(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k R^k P_k(\cos \theta)$$

finden. Für „anständige“ (zum Beispiel stetig differenzierbare) Funktionen $u_R : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist das möglich, und die Koeffizienten lassen sich aufgrund der Orthogonalitätsrelationen einfach bestimmen:

$$a_k = \frac{2k+1}{2R^k} \int_0^\pi u_0(\theta) P_k(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

□

11.10 Die Γ -Funktion

Für $x > 0$ definieren wir

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Weil die Exponentialfunktion schnell fällt, existiert das uneigentliche Integral von 1 bis ∞ . Weil $\int_0^1 t^\alpha dt$ für $\alpha > -1$ existiert, existiert auch $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$. Also ist $\Gamma(x)$ wirklich für alle $x > 0$ definiert.

Zum Beispiel ist $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$. Durch partielle Integration erhält man

$$\int e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x + x \int e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Für $t \searrow 0$ und $t \rightarrow \infty$ verschwindet der erste Term rechts, also folgt

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Das ist ein verblüffendes Ergebnis:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!\Gamma(1) = n!.$$

Die Gammafunktion extrapoliert also die für natürliche Zahlen definierte Fakultät $n!$. Für negative, nicht-ganze Zahlen setzt man Γ so fort, dass die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

erhalten bleibt, also etwa $\Gamma(-\frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4})^{-1}\Gamma(-\frac{1}{4} + 1)$.

Mit `Plot[Gamma[x], {x, -3, 4}, PlotRange -> {-6, 6}]` liefert Mathematica:

