Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit betrachten wir ein Eigenwertproblem der Form

$$-Dy + \lambda y + Q(\lambda)y \;=\; 0 \tag{0.1}$$

und das zugehörige inhomogene Problem

$$-\,Dy + \lambda y + Q(\lambda)y \;=\; g\ . \tag{0.2}$$

Dabei sind y und g Elemente aus einem Kreinraum $\mathcal{H}$, und D ist ein dicht definierter, abgeschlossener Operator mit nichtleerer Resolventenmenge. $Q(\lambda)$ ist eine Operatorfunktion, die die folgende Darstellung erlaubt

$$Q(\lambda) = Q(\infty) + \Gamma^{+}(A-\lambda)^{-1}\Gamma, \tag{0.3}$$

wobei $Q(\infty)$ und A beschränkte selbstadjungierte Operatoren in $\mathcal{H}$ beziehungsweise in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ sind, und Γ eine Abbildung aus $\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ist. Γ^{+} ist die Kreinraumadjungierte von Γ. Wir geben später Bedingungen dafür an, daß eine Operatorfunktion Q sich wie in (0.3) darstellen läßt. Nun kann man Gleichung (0.1) umformen zu dem äquivalenten Eigenwertproblem $\mathbf{L}\mathbf{y} - \lambda\mathbf{y} = 0$ für den linearen Operator

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} D - Q(\infty) & -\Gamma^{+} \\ -\Gamma & A \end{bmatrix} \tag{0.4}$$

im Raum $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ (vgl. Abschnitt 3.1).

Für dieses allgemeine Problem beschreiben wir die Beziehung zwischen den Spektren von $\mathbf{L}$ und der Operatorfunktion $T(\lambda) := -D + \lambda + Q(\lambda)$. Für den Fall, daß D ein halbbeschränkter selbstadjungierter Operator bezüglich eines mit der Kreinraumstruktur verträglichen Hilbertraumskalarproduktes in $\mathcal{H}$ ist, der eine kompakte Resolvente hat, untersuchen wir die Beziehung zwischen den Spektren von A und $\mathbf{L}$. Ist zusätzlich Q die Differenz zweier $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertiger Nevanlinna-Funktionen mit disjunkten kompakten Spektren, so ist der Operator $\mathbf{L}$ ein definisierbarer Operator im Kreinraum $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$.

Diese Ergebnisse wenden wir auf den folgenden Spezialfall von (0.1) an. Wir betrachten

$$y''(x) + \lambda y(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j(x)}{u_j(x) - \lambda}\, y(x) = 0 \tag{0.5}$$

und das zugehörige inhomogene Problem auf dem Intervall $[0,1]$ mit den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$. Dabei seien $y,\ g \in \mathrm{L}_2(0,1)$ und $q_j, u_j \in \mathrm{L}_\infty(0,1)$, $j = 1,\dots,N$, und $\lambda \in \mathbb{C}$ ist der Eigenwertparameter. Probleme der Gestalt (0.5) treten z.B. in der Magnetohydrodynamik auf (vgl. [Li]).

Gleichung (0.5) ist eine Verallgemeinerung des in [LMM] betrachteten Problems. Dort wurden die Gleichung

$$y''(x) + \lambda y(x) + \frac{q(x)}{u(x) - \lambda}\, y(x) = 0$$

und die zugehörige inhomogene Gleichung in $\mathrm{L}_2(0,1)$ unter den Voraussetzungen $q, u \in \mathrm{L}_\infty(0,1)$ und mit den Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ betrachtet. Die Behandlung des Problems (0.1) in der vorliegenden Arbeit stützt sich auf die in [LMM] angewandten Methoden. Wir zeigen, daß sich die meisten Resultate von [LMM] auf (0.5) übertragen lassen.

Weiterhin betrachten wir analog zu [LMM] den zu (0.5) gehörenden Titchmarsh-Weyl-Koeffizienten m. Wir verfolgen die schon in [LMM] begonnene Betrachtung des Titchmarsh-Weyl-Koeffizienten m weiter. Unter gewissen Voraussetzungen, die die Definisierbarkeit von $\mathbf{L}$ zur Folge haben, ist m eine definisierbare Funktion. Die Klasse der definisierbaren Funktionen auf der oberen Halbebene (s. Definition 2.1 und [Jon3]) umfaßt die Krein-Langer-Klassen $\mathbf{N}_\kappa$, $\kappa = 0, 1, \dots$ ($\mathbf{N}_0$ besteht aus den Nevanlinna-Funktionen). Die Klasse der definisierbaren Funktionen auf dem Einheitskreis (s. Definition 2.4 und [Jon2]) umfaßt die Krein-Langer-Klassen $\mathbf{C}_\kappa$, $\kappa = 0, 1, \dots$ ($\mathbf{C}_0$ besteht aus den im Einheitskreis holomorphen Funktionen mit nichtnegativem Realteil). Im Falle, daß u_j, q_j Elementarfunktionen sind, beweisen wir, daß die Cayleytransformierte der zu dem Problem (0.5) gehörenden Linearisierung $\mathbf{L}$ unitär äquivalent ist zu dem Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Variablen in einem Kreinraum von Funktionen, der durch m bestimmt wird.

In dieser Hinsicht konnten wir uns auf die Arbeit [ALM] stützen, in der ein zu (0.5) verwandtes Problem betrachtet wird, dessen Titchmarsh-Weyl-Koeffizient m eine Nevanlinna-Funktion ist. Der zu m assoziierte Operator ist dort unter ähnlichen Voraussetzungen unitär äquivalent zu der Linearisierung des Ausgangsproblems.

Wir kommen nun zur Beschreibung des Inhalts der einzelnen Abschnitte. Zunächst stellen wir in Kapitel 1 benötigte grundliegende Aussagen vor. Dies beinhaltet die Darstellung einiger Resultate aus der Theorie der Kreinräume, insbesondere werden definisierbare Operatoren und der Spektralsatz für diese Operatoren angegeben, ferner wird die Cayleytransformation behandelt und ein Ergebnis über kompakte Störungen definisierbarer Operatoren zitiert. Das Kapitel endet mit einigen Aussagen über Gelfandtripel.

In Kapitel 2 zitieren wir Ergebnisse aus den beiden Arbeiten [Jon2] und [Jon3]. Wir führen den Begriff der definisierbaren Funktion ein. In Abschnitt 2.2

geben wir einen Darstellungssatz für definisierbare Funktionen an ([Jon3]). Für den Beweis dieses Satzes konstruieren wir dann zu einer definisierbaren Funktion F einen Kreinraum $\mathcal{K}_F$, der durch Vervollständigung aus einem Funktionenraum hervorgeht, und einen in diesem Raum definisierbaren unitären Operator U_F, der der Multiplikation mit der unabhängigen Variablen in $\mathcal{K}_F$ entspricht.

In Kapitel 3 betrachten wir das allgemeine Problem (0.1). Wir formen Gleichung (0.1) zu einem äquivalenten Eigenwertproblem des linearen Operators $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L}$ wie in (0.4)) um (Abschnitt 3.1). Wir zeigen dann, daß die Struktur der Jordanketten der Operatorfunktion $T(\lambda) = -D + \lambda + Q(\lambda)$ und der Jordanketten des Operators $\mathbf{L}$ diegleiche ist (Abschnitt 3.2). Ferner geben wir eine Formel für die Resolvente von $\mathbf{L}$ an. Falls D ein selbstadjungierter halbbeschränkter Operator bezüglich eines Hilbertraumskalarproduktes in $\mathcal{H}$ mit kompakter Resolvente ist, erhalten wir das später benötigte Ergebnis $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L}) = \sigma_{\text{ess}}(A)$ (Abschnitt 3.3). Ist zusätzlich Q gleichmäßig definisierbar (vgl. Definition 2.2), so zeigen wir in Abschnitt 3.4, daß der Operator $\mathbf{L}$ ein definisierbarer Operator im Kreinraum $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ ist. Damit kann die Spektraltheorie der definisierbaren Operatoren in Kreinräumen angewendet werden.

Im letzten Kapitel betrachten wir einen Spezialfall der in Kapitel 3 behandelten Gleichung, nämlich Gleichung (0.5). Dazu geben wir zunächst eine konkrete Linearisierung $\mathbf{L}$ an. Unter zusätzlichen Voraussetzungen an die q_j und u_j (vgl. Abschnitt 4.1) erfüllt $\mathbf{L}$ die Voraussetzungen von Abschnitt 3.4, also ist $\mathbf{L}$ ein definisierbarer Operator. In Abschnitt 4.2 führen wir den Titchmarsh-Weyl-Koeffizienten m ein und geben die Greensche Funktion an. Weiterhin betrachten wir die von $\mathbf{L}$ erzeugten Gelfandtripel (Abschnitt 4.3). In Abschnitt 4.4 zeigen wir, daß der Titchmarsh-Weyl-Koeffizient m eine definisierbare Funktion ist. Danach wird der Fall betrachtet, daß u_j, q_j Elementarfunktionen sind (Abschnitt 4.5). In diesem Fall hat $\mathbf{L}$ abzählbares Spektrum, und wir geben ein Kriterium dafür an, daß für einen Häufungspunkt λ des Spektrums, λ kein Eigenwert von $\mathbf{L}$ ist. Ferner zeigen wir, daß $\mathbf{L}$ nur reguläre kritische Punkte besitzt und daß eine Rieszbasis bestehend aus Eigenvektoren und assoziierten Vektoren von $\mathbf{L}$ existiert. Letztendlich beweisen wir, daß die Cayleytransformierte $(\mathbf{L} - i)(\mathbf{L} + i)^{-1}$ von $\mathbf{L}$ unitär äquivalent ist zu dem Operator $U_{\widetilde{m}}$ der Multiplikation mit der unabhängigen Variablen in einem Kreinraum $\mathcal{K}_{\widetilde{m}}$, der dem transformierten Titchmarsh-Weyl-Koeffizienten $\widetilde{m}$, $\widetilde{m}((z-i)(z+i)^{-1}) = -im(z)$, entspricht.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. H. Langer für die Beweisidee des Satzes 3.7 bedanken. Für die interessante Themenstellung und die sorgfältige Betreuung dieser Diplomarbeit bedanke ich mich bei Herrn Dr. P. Jonas.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Grundlegende Bezeichnungen zu linearen Operatoren im Hilbertraum

Es sei im folgenden T stets ein dicht definierter, abgeschlossener Operator in einem Hilbertraum $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$. Der Definitionsbereich, der Wertebereich und der Kern von T werden mit $\mathcal{D}(T)$, $R(T)$ und $N(T)$ bezeichnet. Das Spektrum, das Punktspektrum, das kontinuierliche Spektrum und die Resolventenmenge von T werden mit $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$ und $\rho(T)$ bezeichnet. Unter $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ verstehen wir den linearen Raum der auf ganz $\mathcal{H}$ definierten stetigen linearen Operatoren; falls $\mathcal{K}$ ein zweiter Hilbertraum ist, so verstehen wir unter $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ den linearen Raum der auf ganz $\mathcal{H}$ definierten stetigen linearen Operatoren, die in $\mathcal{K}$ abbilden.

Definition 1.1 *Der lineare Raum*

$$\mathcal{L}_\lambda(T) := \{x \in \mathcal{D}(T) : \exists k \in \mathbb{N} \textit{ mit } x \in \mathcal{D}(T^k) \textit{ und } (T-\lambda)^k x = 0\}$$

wird algebraischer Eigenraum von T zum Eigenwert λ und die Dimension von $\mathcal{L}_\lambda(T)$ wird die algebraische Vielfachheit von λ genannt. Die Dimension des Kernes $N(T-\lambda)$ von $T-\lambda$ wird die geometrische Vielfachheit von λ genannt. Gilt $N(T-\lambda) = \mathcal{L}_\lambda(T)$, so wird λ halbeinfacher Eigenwert genannt.

Definition 1.2 *Ein Eigenwert λ heißt normaler Eigenwert, falls eine direkte Zerlegung von $\mathcal{H}$ der Gestalt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \dot{+} \mathcal{L}_\lambda(T)$ existiert, so daß $(T-\lambda)|_{\mathcal{H}_0}$ eine bijektive Abbildung von $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{H}_0$ auf $\mathcal{H}_0$ definiert (d.h. $\mathcal{H}_0$ ist invariant unter T und $\lambda \in \rho(T|_{\mathcal{H}_0})$).*

Definition 1.3 *Mit $\sigma_{\mathrm{p,norm}}(T)$ bezeichnen wir die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, die isolierte Punkte des Spektrums von T und normale Eigenwerte von endlicher algebraischer Vielfachheit des Operators T sind.*

Definition 1.4 *Es seien $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, $\{\varphi_j\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ und B ein beschränkter und beschränkt invertierbarer Operator in $\mathcal{H}$. Dann ist $\{\psi_j\} := \{B\varphi_j\}$ eine Basis von $\mathcal{H}$ (siehe* [GK, S. 309]*). Basen $\{\psi_j\}$, die durch solche Transformationen entstehen, nennt man Rieszbasen.*

Für den starken Grenzwert einer Folge von Operatoren $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ schreiben wir $\text{s-lim}_{n\to\infty} T_n = T$. Ferner erinnern wir an die Definition der Spektralschar (vergleiche z.B. [We]):

Definition 1.5 *Eine Spektralschar in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist eine Funktion $E : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit den Eigenschaften:*

(1) *$E(t)$ ist ein orthogonaler Projektor für jedes $t \in \mathbb{R}$,*

(2) *es gilt $E(s) \leq E(t)$ für $s \leq t$ (Monotonie),*

(3) *es gilt* $\text{s-lim}_{\epsilon\to 0+} E(t+\epsilon) = E(t)$ *für alle $t \in \mathbb{R}$ (Rechtsstetigkeit),*

(4) *es ist* $\text{s-lim}_{t\to-\infty} E(t) = 0$ *und* $\text{s-lim}_{t\to\infty} E(t) = I$.

Definition 1.6 *Existiert für einen selbstadjungierten Operator T in $\mathcal{H}$ ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $(Tx,x) \geq \gamma\|x\|^2$ für alle $x \in \mathcal{D}(T)$, so wird T halbbeschränkt nach unten genannt.*

Weiterhin benötigen wir die Definition operatorwertiger Maße.

Definition 1.7 *Ein positives, operatorwertiges Maß ist ein Maß, welches auf der Borel σ-Algebra von $\mathbb{R}$ definiert ist und als Werte positive, beschränkte Operatoren in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ hat. Der Träger eines Maßes σ ist definiert durch* $\operatorname{supp}\sigma := \{x \in \mathbb{R} : \sigma(V) \neq 0$ *für jede offene Umgebung V von x*$\}$.

1.2 Kreinräume

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{K}$ stets ein komplexer Vektorraum. Unter einem *Skalarprodukt* oder *inneren Produkt* auf $\mathcal{K}$ verstehen wir eine hermitesche Sesquilinearform $[\cdot,\cdot]$ auf $\mathcal{K}$. Dies ist eine Abbildung $[\cdot,\cdot] : \mathcal{K}\times\mathcal{K} \to \mathbb{C}$, so daß für alle $x, y, z \in \mathcal{K}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ die Beziehungen

$$[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x,z] + \mu[y,z] \text{ und } [x,y] = \overline{[y,x]}$$

erfüllt sind. Wir definieren die Teilmengen

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}_{++} := \{x \in \mathcal{K} : [x,x] > 0\}, \quad \mathcal{P}_0 := \{x \in \mathcal{K} : [x,x] = 0\}, \\ &\mathcal{P}_{--} := \{x \in \mathcal{K} : [x,x] < 0\}, \quad \mathcal{P}_+ := \mathcal{P}_{++} \cup \mathcal{P}_0, \ \mathcal{P}_- := \mathcal{P}_{--} \cup \mathcal{P}_0. \end{aligned}$$

Die in diesen Mengen liegenden Vektoren heißen *positiv*, *neutral*, *negativ*, *nichtnegativ* beziehungsweise *nichtpositiv*. Einen Unterraum $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ mit $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}_{++} \cup \{0\}$,

$\mathcal{L} \subset \mathcal{P}_0$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}_{--} \cup \{0\}$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}_+$ bzw. $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}_-$ nennen wir *positiv*, *neutral*, *negativ*, *nichtnegativ* bzw. *nichtpositiv*. In allen diesen Fällen sagen wir, $\mathcal{L}$ sei *semidefinit*. Einen Unterraum, der nicht semidefinit ist, nennen wir *indefinit*.

Es seien $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ lineare Teilräume von $\mathcal{K}$. Den Unterraum $\mathcal{L}^{[\perp]} := \{x \in \mathcal{K} : [x, y] = 0$ für jedes $y \in \mathcal{L}\}$ nennen wir den *Orthogonalraum* zu $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^0 := \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ den *isotropen* Teil von $\mathcal{L}$. Gilt $\mathcal{L}^0 = \{0\}$, so heißt $\mathcal{L}$ *nichtausgeartet*, anderenfalls *ausgeartet*. Die beiden Teilräume $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ heißen *orthogonal*, in Zeichen $\mathcal{L}_1[\perp]\mathcal{L}_2$, falls $[x, y] = 0$ für alle $x \in \mathcal{L}_1$ und $y \in \mathcal{L}_2$ gilt. Für $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1[\perp]\mathcal{L}_2$ schreiben wir abkürzend $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1[+]\mathcal{L}_2$. Falls die Summe außerdem noch direkt ist, schreiben wir $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1[\dot{+}]\,\mathcal{L}_2$.

Definition 1.8 *Es seien $\mathcal{K}$ ein komplexer Vektorraum und $[\cdot,\cdot]$ ein inneres Produkt auf $\mathcal{K}$. Dann heißt $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]\,)$ ein Kreinraum, falls eine Zerlegung*

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+[\dot{+}]\,\mathcal{K}_- \tag{1.1}$$

existiert, so daß $(\mathcal{K}_+, [\cdot,\cdot]\,)$ und $(\mathcal{K}_-, -[\cdot,\cdot]\,)$ Hilberträume sind.

Eine Zerlegung des Raumes $\mathcal{K}$ der Gestalt (1.1) wird *Fundamentalzerlegung* genannt.

Im folgenden sei $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]\,)$ ein Kreinraum. Mit Hilfe der Fundamentalzerlegung (1.1) läßt sich auf $\mathcal{K}$ ein positiv definites Skalarprodukt definieren

$$(x, y) := [x_+, y_+] - [x_-, y_-], \text{ mit } x = x_+ + x_-,\ y = y_+ + y_-,\ x_\pm, y_\pm \in \mathcal{K}_\pm. \tag{1.2}$$

Wie man leicht sieht (vgl. [AI, S. 15]), ist $(\mathcal{K}, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum. $(\mathcal{K}, (\cdot,\cdot))$ ist die orthogonale Summe der Hilberträume $(\mathcal{K}_+, [\cdot,\cdot]\,)$ und $(\mathcal{K}_-, -[\cdot,\cdot]\,)$. Nun führen wir folgende Projektoren $P_\pm$ ein :

$$P_\pm x := x_\pm, \text{ falls } x \in \mathcal{K},\ x = x_+ + x_-,\ x_\pm \in \mathcal{K}_\pm.$$

Der Operator $J := P_+ - P_-$ heißt *Fundamentalsymmetrie* von $\mathcal{K}$. Offenbar gilt $J^2 = I$ und $J = J^* = J^{-1}$, wobei mit * die Adjungiertenbildung bezüglich des Hilbertraumskalarproduktes $(\cdot,\cdot)$ bezeichnet wird. Ferner gilt

$$[x, y] = (Jx, y)\ ,\ (x, y) = [Jx, y] \quad \text{für } x, y \in \mathcal{K}.$$

Das Hilbertraumskalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ hängt von der gewählten Fundamentalzerlegung (1.1) ab, die, mit Ausnahme des Falles, daß der ganze Raum positiv oder negativ ist, nicht eindeutig bestimmt ist. Aber es läßt sich zeigen (vgl. [Lan, Proposition 1.1 und Proposition 1.2]), daß für zwei Fundamentalzerlegungen

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+[\dot{+}]\,\mathcal{K}_- \text{ und } \mathcal{K} = \mathcal{K}'_+[\dot{+}]\,\mathcal{K}'_-$$

von $\mathcal{K}$ die Dimensionen der entsprechenden Unterräume übereinstimmen,

$$\dim \mathcal{K}_\pm = \dim \mathcal{K}'_\pm,$$

und die zugehörigen Hilbertraumskalarprodukte $(\cdot,\cdot)$ und $(\cdot,\cdot)'$ äquivalente Normen erzeugen. Alle topologischen Begriffe in einem Kreinraum wie Stetigkeit, Abgeschlossenheit, Spektrum eines Operators in $\mathcal{K}$ usw. beziehen sich auf diese Hilbertraumtopologie.

Falls $\kappa := \min\{\dim \mathcal{K}_+, \dim \mathcal{K}_-\} < \infty$ ist, so wird der Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ ein *Pontrjaginraum* oder auch *Π_κ-Raum* genannt. In diesem Fall wird $\dim \mathcal{K}_+$ (bzw. $\dim \mathcal{K}_-$) die *Zahl der positiven (negativen) Quadrate* des inneren Produktes $[\cdot,\cdot]$ genannt.

1.3 Lineare Operatoren im Kreinraum

Es sei $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ wieder ein Kreinraum, und T sei ein dicht definierter Operator in $\mathcal{K}$. Die *Adjungierte* T^+ zu T bezüglich des Kreinraumskalarproduktes ist wie folgt definiert: $\mathcal{D}(T^+)$ ist die Menge aller $x \in \mathcal{K}$, für die ein x' existiert mit der Eigenschaft

$$[Ty, x] = [y, x'] \quad \text{für alle } y \in \mathcal{D}(T),$$

und für diese x setzen wir $T^+x := x'$. Es sei J eine Fundamentalsymmetrie des Kreinraumes $\mathcal{K}$ und T^* die Adjungierte von T im zugehörigen Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot,\cdot))$. Nach [Bog, VI Lemma 2.1] gilt dann

$$T^+ = JT^*J.$$

Hieraus und aus den Eigenschaften von Hilbertraumadjungierten ergibt sich (vgl. [Bog, S. 122-123]):

Satz 1.9 *Es seien S, T dicht definierte Operatoren in $\mathcal{K}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(1) *T^+ ist ein abgeschlossener Operator.*

(2) *Falls T abgeschlossen ist, gilt $\overline{\mathcal{D}(T^+)} = \mathcal{K}$ und $(T^+)^+ = T$.*

(3) *Es gilt $(\alpha T)^+ = \overline{\alpha} T^+$ und, falls $T+S$ dicht definiert ist, $(T+S)^+ \supset T^+ + S^+$.*

(4) *Falls TS dicht definiert ist, gilt $(TS)^+ \supset S^+T^+$.*

(5) *Es sei $T \subset S$, dann gilt $S^+ \subset T^+$.*

(6) *Falls T beschränkt invertierbar ist, existiert $(T^+)^{-1}$ und es gilt $(T^+)^{-1} = (T^{-1})^+$.*

(7) *Aus $T \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ folgt $T^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ und $\|T^+\| = \|T\|$.*

(8) *$\sigma(T^+) = \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.*

Wir nennen den dicht definierten Operator T *selbstadjungiert* im Kreinraum $\mathcal{K}$, falls $T = T^+$ gilt. Ein Operator U in $\mathcal{K}$ heißt *isometrisch*, falls $[Ux, Uy] = [x, y]$ für alle $x, y \in \mathcal{D}(U)$ erfüllt ist. Gilt zusätzlich $\mathcal{D}(U) = \mathcal{K} = R(U)$, so heißt U *unitär*. Nach [Bog, S. 128] ist in diesem Fall U beschränkt, beschränkt invertierbar und es gilt $U^+ = U^{-1}$.

Mit $\hat{\mathbb{C}}$ und $\hat{\mathbb{R}}$ bezeichnen wir die Einpunktkompaktifizierungen von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$. Für $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ sei $G^* := \{\overline{z} : z \in G\}$. Für eine Funktion $f : G \to \hat{\mathbb{C}}$ setzen wir $\overline{f} : G^* \to \hat{\mathbb{C}}$, $\overline{f}(z) := \overline{f(\overline{z})}$. Es sei T nun ein dicht definierter, abgeschlossener Operator mit nichtleerer Resolventenmenge. Das *erweiterte Spektrum* $\sigma_e(T)$ ist definiert durch

$$\sigma_e(T) := \begin{cases} \sigma(T), & \text{falls } T \text{ beschränkt ist,} \\ \sigma(T) \cup \{\infty\}, & \text{falls } T \text{ unbeschränkt ist.} \end{cases}$$

Mit $\mathcal{F}(T)$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen f, die auf einer Umgebung $D(f)$ von $\sigma_e(T)$ holomorph sind und mit $f(T)$, $f \in \mathcal{F}(T)$, den mit Hilfe des Riesz-Dunford-Taylorschen Funktionalkalküls [DS, S. 566-577, S. 599-604] definierten Operator.

Lemma 1.10 *Für $f \in \mathcal{F}(T)$ gilt $f(T)^+ = \overline{f}(T^+)$.*

Beweis. Wegen (8) aus Satz 1.9 folgt aus $f \in \mathcal{F}(T)$ stets $\overline{f} \in \mathcal{F}(T^+)$. Wir nehmen zunächst an, daß T beschränkt ist. Zu beliebigem $f \in \mathcal{F}(T)$ existiert eine Folge rationaler Funktionen, die auf $D(f)$ lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Man zeigt leicht, daß für rationale Funktionen $r \in \mathcal{F}(T)$ die Aussage des Lemmas gilt und mit [DS, VII Lemma 3.13] daher auch für f. Ist T unbeschränkt, so wählen wir ein $\lambda \in \rho(T)$, und wir setzen $h(z) := (\lambda - z)^{-1}$ und $A := h(T)$. Dann ist $f \circ h^{-1} \in \mathcal{F}(A)$ für $f \in \mathcal{F}(T)$, und es gilt

$$f(T)^+ = (f \circ h^{-1})(A)^+ = (\overline{f \circ h^{-1}})(A^+) = (\overline{f} \circ \overline{h}^{-1})(A^+) = \overline{f}(T^+).$$

□

Ein Projektor $E \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$, d.h. $E^2 = E$, heißt *orthogonal* im Kreinraum $\mathcal{K}$, falls $E = E^+$ gilt. Nach [Lan, Theorem 5.2] gilt:

Lemma 1.11 *Es sei $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ ein abgeschlossener Unterraum eines Kreinraumes $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$. Dann ist $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$ genau dann ein Kreinraum, wenn ein orthogonaler Projektor E in $\mathcal{K}$ mit $E\mathcal{K} = \mathcal{L}$ existiert. Ist in diesem Fall $\mathcal{L}$ ein positiver (negativer) Teilraum von $\mathcal{K}$, dann ist $(\mathcal{L}, [\cdot,\cdot])$ (bzw. $(\mathcal{L}, -[\cdot,\cdot])$) ein Hilbertraum.*

Eine Teilmenge σ von $\sigma_e(T)$ heißt *Spektralmenge* von T, falls σ in $\sigma_e(T)$ sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Es sei σ eine beschränkte Spektralmenge. Der zugehörige Riesz-Projektor $E(T, \sigma)$ ist definiert durch

$$E(T, \sigma) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\sigma} (T - z)^{-1} \, dz,$$

wobei $\mathcal{C}_\sigma$ aus einer endlichen Anzahl positiv orientierter, rektifizierbarer Jordankurven besteht, so daß σ im Inneren und $\sigma(T)\backslash\sigma$ im Äußeren von $\mathcal{C}_\sigma$ liegt. Dann gilt nach [Lan, S. 9] $E(T,\sigma)^+ = E(T^+,\sigma^*)$, und folgende Aussagen über das Spektrum eines im Kreinraum selbstadjungierten Operators gelten [Lan, Proposition 3.2]:

Satz 1.12 *Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators T in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ ist symmetrisch zur reellen Achse: $\sigma(T) = \sigma(T)^*$. Sei σ eine Spektralmenge von T. Falls $\sigma = \sigma^*$ ist, so gilt $E(T,\sigma) = E(T,\sigma)^+$, und falls $\sigma \cap \sigma^* = \emptyset$ ist, so gilt $E(T,\sigma)^+ E(T,\sigma) = 0$.*

Weiterhin sind für einen isolierten Eigenwert $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$ die Jordanstrukturen der algebraischen Eigenräume zu λ_0 und $\overline{\lambda_0}$ gleich.

1.4 Definisierbare selbstadjungierte Operatoren

In diesem Abschnitt betrachten wir eine bestimmte Klasse von selbstadjungierten Operatoren in Kreinräumen und geben für diese den Spektralsatz an. Wir verweisen auf die Arbeiten [Jon1] und [Lan].

Definition 1.13 *Es sei A ein selbstadjungierter Operator im Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$. Dann heißt A definisierbar, wenn $\rho(A) \neq \emptyset$ gilt, und ein Polynom p, $p \neq 0$, existiert, so daß*

$$[p(A)x, x] \geq 0 \text{ für } x \in \mathcal{D}(A^k) \text{ mit } k = \deg\,(p) \text{ gilt.}$$

p heißt dann definisierendes Polynom von A.

Offenbar ist dann auch $\frac{1}{2}(p + \overline{p})$ ein definisierendes Polynom von A. Es genügt daher, definisierende Polynome mit reellen Koeffizienten zu betrachten. Ein selbstadjungierter Operator A im Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ mit $\rho(A) \neq \emptyset$ und $[Ax, x] \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{D}(A)$ heißt *nichtnegativ*. Insbesondere sind nichtnegative Operatoren definisierbar.

Es bezeichne $k(\lambda; p)$ im folgenden für eine komplexe Zahl λ die Vielfachheit der Nullstelle eines vorgegebenen Polynoms p bei λ. Dabei wird $k(\lambda; p) = 0$ gesetzt, falls λ keine Nullstelle von p ist. Nach [Lan] gilt:

Satz 1.14 *Es sei A ein definisierbarer selbstadjungierter Operator in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ mit definisierendem Polynom p. Dann besteht das nichtreelle Spektrum $\sigma_0(A)$ aus einer endlichen Anzahl von Punktpaaren $\lambda, \overline{\lambda}$. Jeder isolierte*

Spektralpunkt λ von A ist ein Eigenwert und ein Pol der Resolvente der Ordnung $\nu(\lambda)$ mit

$$\nu(\lambda) \leq \begin{cases} k(\lambda;p), & \textit{falls } \lambda \neq \overline{\lambda}, \\ k(\lambda;p)+1, & \textit{falls } \lambda = \overline{\lambda}. \end{cases}$$

Es ist $\nu(\lambda) = \nu(\overline{\lambda})$.

Zu jedem $\xi \in \mathbb{R}$ existieren $\epsilon, \delta > 0$ und ein $M \in \mathbb{R}$, so daß

$$\|(A-\lambda)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\operatorname{Im}\lambda|^{k(\xi;p)+1}}$$

gilt für alle λ mit $|\xi - \operatorname{Re}\lambda| < \epsilon$ und $0 < |\operatorname{Im}\lambda| < \delta$. Insbesondere ist für einen reellen Eigenwert ξ von A die Länge einer jeden zugehörigen Jordankette kleiner oder gleich $k(\xi;p)+1$.

Der Operator A ist genau dann beschränkt, wenn sein Spektrum beschränkt ist.

Es sei $E(A, \sigma_0(A))$ der nach Satz 1.12 selbstadjungierte Projektor, der zum nichtreellen Spektrum $\sigma_0(A)$ von A gehört. Dann gilt

$$\mathcal{K} = E(A, \sigma_0(A))\mathcal{K}[\dot{+}]\,(I - E(A, \sigma_0(A)))\mathcal{K}.$$

Das Spektum der Einschränkung des Operators A auf $(I - E(A, \sigma_0(A)))\mathcal{K}$ ist reell.

Mit $N(p)$ bezeichnen wir die Menge der Nullstellen eines Polynoms p. Für einen definisierbaren selbstadjungierten Operator A betrachten wir die Menge

$$\widetilde{c}(A) := \bigcap_p N(p) \cap \sigma(A) \cap \mathbb{R},$$

wobei der Durchschnitt über alle definisierenden Polynome p von A genommen wird. Insbesondere besteht $\widetilde{c}(A)$ aus endlich vielen Punkten.

Es bezeichne im folgenden $\mathcal{R}_A$ die Boolesche Algebra ([DS, I.12]) der Teilmengen von $\hat{\mathbb{R}}$, die aus allen beschränkten Intervallen, deren Endpunkte nicht in $\widetilde{c}(A)$ liegen, und deren Komplementen in $\hat{\mathbb{R}}$ besteht. Nach [Lan] gilt:

Satz 1.15 *Es sei A ein definisierbarer selbstadjungierter Operator in einem Kreinraum $\mathcal{K}$. Dann existiert eine Abbildung $E : \mathcal{R}_A \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ mit den folgenden Eigenschaften, wobei Δ, $\Delta' \in \mathcal{R}_A$ sind:*

(1) *$E(\Delta)$ ist selbstadjungiert im Kreinraum $\mathcal{K}$. Es gilt weiterhin $E(\hat{\mathbb{R}})\mathcal{K} = (I - E(A, \sigma_0(A)))\mathcal{K}$, $E(\emptyset) = 0$, $E(\Delta)E(\Delta') = E(\Delta \cap \Delta')$ und $E(\Delta \cup \Delta') = E(\Delta) + E(\Delta') - E(\Delta)E(\Delta')$.*

(2) *$E(\Delta)$ ist vertauschbar mit allen Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{K})$, die mit der Resolvente von A vertauschbar sind. Es gilt $E(\Delta)\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ und $E(\Delta)A \subset AE(\Delta)$. Ist Δ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, dann ist $E(\Delta)\mathcal{K} \subset \mathcal{D}(A)$.*

(3) *Es gilt* $\sigma_e(A|_{E(\Delta)\mathcal{K}}) \subseteq \overline{\Delta}$.

(4) $E(\Delta)\mathcal{K}$ *ist ein positiver (negativer) Teilraum von* $\mathcal{K}$*, falls für ein definisierendes Polynom* p *von* A *die Bedingung* $p(z) > 0$ *(bzw.* $p(z) < 0$*) für alle* $z \in \overline{\Delta} \cap \sigma(A)$ *erfüllt ist.*

Für einen definisierbaren selbstadjungierten Operator A im Kreinraum $\mathcal{K}$ definieren wir

$$c(A) := \begin{cases} \tilde{c}(A) \cup \{\infty\}, & \text{falls für jede unbeschränkte Menge } \Delta, \\ & \Delta \in \mathcal{R}_A, \text{ der Raum } E(\Delta)\mathcal{K} \text{ indefinit ist,} \\ \tilde{c}(A) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Menge $c(A)$ heißt die Menge der *kritischen Punkte* von A.

Es sei $t \notin c(A)$. Dann existiert ein definisierendes Polynom p von A und eine Umgebung $\Delta \in \mathcal{R}_A$ von t, so daß p in Δ keine Nullstelle hat. Nach Satz 1.15 und Lemma 1.11 ist entweder der Raum $(E(\Delta)\mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ oder der Raum $(E(\Delta)\mathcal{K}, -[\cdot,\cdot])$ ein Hilbertraum. Der Operator $A|_{E(\Delta)\mathcal{K}}$ ist ein selbstadjungierter Operator in $E(\Delta)\mathcal{K}$ und auf Δ verhält sich die Abbildung E genauso wie die Spektralfunktion eines selbstadjungierten Operators in einem Hilbertraum. Insbesondere ist die Menge der Projektoren $E(\Delta')$, $\Delta' \subseteq \Delta$, gleichmäßig beschränkt.

Definition 1.16 *Es sei* $\alpha \in c(A)$*. Falls für beliebige* $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R} \setminus c(A)$ *die Grenzwerte*

$$\text{s-}\lim_{\lambda \uparrow \alpha} E([\lambda_0, \lambda]) \quad \textit{und} \quad \text{s-}\lim_{\lambda \downarrow \alpha} E([\lambda, \lambda_1])$$

in der starken Operatortopologie existieren, wobei für den Fall $\alpha = \infty$ *der zweite Grenzwert als* $\lim_{\lambda \downarrow -\infty} E([\lambda, \lambda_1])$ *zu verstehen ist, dann heißt* α *regulärer kritischer Punkt von* A*, anderenfalls heißt* α *singulärer kritischer Punkt.*

Aus [Lan, Theorem 5.7] folgt, daß die Abbildung $\Delta \mapsto E(\Delta)$ fortgesetzt werden kann auf die Boolesche Algebra, die durch die beschränkten Intervalle mit Endpunkten, die nicht singuläre kritische Punkte sind, und deren Komplementen erzeugt wird. Für diese Erweiterung bleiben die Eigenschaften (1)-(4) von Satz 1.15 erhalten.

Als letztes geben wir noch eine Charakterisierung der kritischen Punkte an [Lan, Proposition 4.2].

Satz 1.17 *Es gilt* $\alpha \in c(A)$ *genau dann, wenn für jedes* $\Delta \in \mathcal{R}_A$ *mit* $\alpha \in \Delta$ *das Skalarprodukt* $[\cdot,\cdot]$ *indefinit auf* $E(\Delta)\mathcal{K}$ *ist.*

1.5 Cayleytransformation

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Zusammenhang von definisierbaren selbstadjungierten Operatoren und definisierbaren unitären Operatoren in Kreinräumen zu beschreiben. Dazu beginnen wir mit der Definition eines definisierbaren unitären Operators.

Definition 1.18 *Ein unitärer Operator U im Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$ heißt definisierbar, falls es eine rationale Funktion $r \neq 0$ gibt, deren Pole alle in $\rho(U) \cup \{\infty\}$ liegen, so daß*

$$[r(U)x, x] \geq 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathcal{K}$$

gilt. Wir bezeichnen r dann als definisierende Funktion von U.

Offenbar ist dann auch $\tilde{r}(z) := \frac{1}{2}(r(z) + \overline{r(\overline{z}^{-1})})$ eine definisierende Funktion von U. Es genügt daher, definisierende Funktionen mit $r(z) = \overline{r(\overline{z}^{-1})}$ zu betrachten.

Analog könnte man auch die Definisierbarkeit von selbstadjungierten Operatoren in Kreinräumen mittels rationaler Funktionen einführen, was jedoch äquivalent zur Definition 1.13 ist, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 1.19 *Ein selbstadjungierter Operator A in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ mit $\rho(A) \neq \emptyset$ ist definisierbar genau dann, wenn eine rationale Funktion $r \in \mathcal{F}(A)$, $r \neq 0$, existiert, so daß $[r(A)x, x] \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{K}$ gilt.*

Beweis. Es sei A ein definisierbarer selbstadjungierter Operator im Kreinraum $\mathcal{K}$ mit einem definisierenden Polynom p. Ist A beschränkt, so ist $p \in \mathcal{F}(A)$ und $p(A)$ ein nichtnegativer Operator. Ist A hingegen unbeschränkt, so wählen wir ein $\alpha \in \rho(A)$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\deg(p) \leq n$, und wir definieren $r(z) := p(z)(z-\alpha)^{-n}(z-\overline{\alpha})^{-n}$. Dann ist $r \in \mathcal{F}(A)$, und für alle $x \in \mathcal{K}$ gilt

$$[r(A)x, x] = [p(A)(A-\alpha)^{-n}x, (A-\alpha)^{-n}x] \geq 0.$$

Sei nun umgekehrt r eine rationale Funktion, $r \in \mathcal{F}(A)$, $r = p/q$, $n_p := \deg(p)$, $n_q := \deg(q)$ so, daß $r(A)$ ein nichtnegativer Operator ist. Ist A beschränkt, so ist $q \in \mathcal{F}(A)$. Wegen Lemma 1.10 gilt $\overline{q}(A) = q(A)^+$, und $p\overline{q} = rq\overline{q}$ ist dann ein definisierendes Polynom für A. Ist A unbeschränkt, so folgt, da r zu $\mathcal{F}(A)$ gehört, $n_p \leq n_q$. Ferner folgt mit [DS, VII 9.8] $p(A)x = q(A)r(A)x$ für $x \in \mathcal{D}(A^{n_p})$ und $\overline{q}(A) \subset q(A)^+$. Für $x \in \mathcal{D}(A^{n_p+n_q})$ gilt somit $(\overline{q}p)(A)x = \overline{q}(A)p(A)x = \overline{q}(A)q(A)r(A)x$ und daher ist

$$[(\overline{q}p)(A)x, x] = [\overline{q}(A)q(A)r(A)x, x] = [r(A)q(A)x, q(A)x] \geq 0.$$

□

Eine rationale Funktion r mit Eigenschaften wie in Lemma 1.19 nennen wir im folgenden eine *definisierende Funktion* von A.

Wir wollen nun die Cayleytransformierte von A betrachten. Hierzu sei $\lambda \in \rho(A) \setminus \mathbb{R}$ gewählt, und wir setzen

$$\psi(z) := \frac{z - \overline{\lambda}}{z - \lambda} \quad \text{und} \quad U := \psi(A).$$

Die folgenden Aussagen ergeben sich aus [Bog, S. 136-138] und dem Spektralabbildungssatz.

Lemma 1.20 *Es sei A ein definisierbarer selbstadjungierter Operator im Kreinraum $\mathcal{K}$ und $r \in \mathcal{F}(A)$ eine definisierende rationale Funktion von A. Dann gilt:*

(1) *U ist ein unitärer Operator, und es gilt $1 \in \rho(U) \cup \sigma_c(U)$.*

(2) *A ist beschränkt genau dann, wenn $1 \in \rho(U)$ ist.*

(3) *Es gilt $f \in \mathcal{F}(U)$ genau dann, wenn $f \circ \psi \in \mathcal{F}(A)$ gilt.*

(4) *Es ist $r \circ \psi^{-1} \in \mathcal{F}(U)$, und $r \circ \psi^{-1}$ ist eine definisierende Funktion für U.*

(5) *$\sigma(U) = \psi(\sigma_e(A))$.*

(6) *Es sei $\alpha \in \sigma(A) \setminus \mathbb{R}$. Nach Satz 1.14 hat die Resolvente von A in α einen Pol. Dann hat die Resolvente von U in $\psi(\alpha)$ ebenfalls einen Pol von derselben Ordnung.*

1.6 Spektralsatz für definisierbare unitäre Operatoren

In diesem Abschnitt geben wir den Spektralsatz für definisierbare unitäre Operatoren an.

Es bezeichne $k(\lambda; r)$ im folgenden die Vielfachheit der Nullstelle λ einer vorgegebenen Funktion r. Ferner bezeichnen wir mit $\mathbf{T}$ die Einheitskreislinie $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Satz 1.21 *Es sei U ein definisierbarer unitärer Operator in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ mit einer definisierenden Funktion r. Es sei $\sigma_0(U) := \sigma(U) \setminus \mathbf{T}$. Dann besteht $\sigma_0(U)$ aus einer endlichen Anzahl von Punktpaaren $z, \overline{z}^{-1}$. Jeder isolierte Spektralpunkt z von U ist ein Eigenwert und ein Pol der Resolvente der Ordnung $\nu(z)$ mit*

$$\nu(z) \leq \begin{cases} k(z; r), & \textit{falls } |z| \neq 1, \\ k(z; r) + 1, & \textit{falls } |z| = 1. \end{cases}$$

Es ist $\nu(z) = \nu(\overline{z}^{-1})$.

Wir zerlegen das Spektrum von U in die Spektralmengen $\sigma_0 := \sigma_0(U)$ und $\sigma_1 := \sigma(U) \cap \mathbf{T}$. Es läßt sich zeigen, daß die Riesz-Projektoren $E(U, \sigma_0)$ und $E(U, \sigma_1)$ selbstadjungiert im Kreinraum $\mathcal{K}$ sind. Dann sind $E(U, \sigma_0)\mathcal{K}$ und $E(U, \sigma_1)\mathcal{K}$ Kreinräume, und es gilt

$$\mathcal{K} = E(U, \sigma_0)\mathcal{K}[\dot{+}]\, E(U, \sigma_1)\mathcal{K}.$$

Offenbar ist $U|_{E(U,\sigma_i)\mathcal{K}}$ ein definisierbarer unitärer Operator mit $\sigma(U|_{E(U,\sigma_i)\mathcal{K}}) = \sigma_i$ für $i = 0, 1$.

Mit $N(r)$ bezeichnen wir die Menge der Nullstellen einer rationalen Funktion r. Für einen definisierbaren unitären Operator U betrachten wir die Menge

$$c(U) := \bigcap_r N(r) \cap \sigma(U) \cap \mathbf{T},$$

wobei der Durchschnitt über alle definisierenden Funktionen r von U genommen wird. Die Elemente der endlichen Menge $c(U)$ werden die *kritischen Punkte* von U genannt.

Es bezeichne im folgenden $\mathcal{R}_U$ die Boolesche Algebra aller Borelmengen $\omega \subset \mathbf{T}$, deren Randpunkte nicht zu $c(U)$ gehören.

Satz 1.22 *Es sei U ein definisierbarer unitärer Operator in einem Kreinraum $\mathcal{K}$. Dann existiert eine Abbildung $E : \mathcal{R}_U \to \mathcal{L}(\mathcal{K})$ mit den folgenden Eigenschaften, wobei ω, $\omega' \in \mathcal{R}_U$ sind:*

(1) *$E(\omega)$ ist selbstadjungiert im Kreinraum $\mathcal{K}$. Es gilt $E(\mathbf{T})\mathcal{K} = E(U, \sigma_1)\mathcal{K}$, $E(\emptyset) = 0$, $E(\omega)E(\omega') = E(\omega \cap \omega')$ und $E(\omega \cup \omega') = E(\omega) + E(\omega') - E(\omega)E(\omega')$.*

(2) *$E(\omega)$ ist vertauschbar mit allen Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{K})$, die mit U vertauschen.*

(3) *Es gilt $\sigma(U|_{E(\omega)\mathcal{K}}) \subseteq \overline{\omega}$.*

(4) *$E(\omega)\mathcal{K}$ ist ein positiver (negativer) Teilraum von $\mathcal{K}$, falls für eine definisierende Funktion r von U die Bedingung $r(z) > 0$ (bzw. $r(z) < 0$) für alle $z \in \overline{\omega} \cap \sigma(U)$ erfüllt ist.*

Mit $c_\infty(U)$ bezeichnen wir die Menge aller $t \in c(U)$, so daß für alle $\omega \in \mathcal{R}_U$ mit $\omega \cap c(U) = \{t\}$ ein positiver und ein negativer Teilraum von $E(\omega)\mathcal{K}$ existieren, deren Dimensionen unendlich sind.

Im folgenden wollen wir den engen Zusammenhang der Sätze 1.15 und 1.22 darstellen. Es sei U die Cayleytransformierte eines definisierbaren selbstadjungierten Operators A, also $U := \psi(A)$ (vgl. Abschnitt 1.5). Es sei ∞ ein kritischer Punkt von A, dann gilt $\mathcal{R}_A = \{\psi^{-1}(\omega) : \omega \in \mathcal{R}_U\}$ und $E(\omega; A) = E(\psi(\omega); U)$

für $\omega \in \mathcal{R}_A$. Ist hingegen ∞ kein kritischer Punkt von A, so sei $\widetilde{\mathcal{R}}_A$ die Boolesche Algebra der Teilmengen von $\hat{\mathbb{R}}$, die aus allen Intervallen, deren Endpunkte nicht in $\tilde{c}(A)$ liegen, und deren Komplementen in $\hat{\mathbb{R}}$ besteht. Die Abbildung $\Delta \mapsto E(\Delta)$ kann dann auf $\widetilde{\mathcal{R}}_A$ fortgesetzt werden (vgl. Abschnitt 1.4). Es gilt dann $\widetilde{\mathcal{R}}_A = \{\psi^{-1}(\omega) : \omega \in \mathcal{R}_U\}$ und $E(\omega; A) = E(\psi(\omega); U)$ für $\omega \in \widetilde{\mathcal{R}}_A$.

1.7 Kompakte Störungen von definisierbaren Operatoren

In diesem Abschnitt werden kurz einige Ergebnisse und Definitionen aus [JL1] dargestellt. Mit $\sigma_0(A)$ bezeichnen wir das nichtreelle Spektrum eines selbstadjungierten Operators A und mit $\sigma_{0,\infty}(A)$ die Menge aller nichtreellen Eigenwerte von A mit unendlichdimensionalem Eigenraum.

Definition 1.23 *Ein selbstadjungierter Operator A in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ heißt stark stabil, falls A definisierbar ist, $c(A) = \emptyset$ und $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ gilt.*

Für einen Unterraum $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ bezeichnen wir mit $\kappa_+(\mathcal{L})$ ($\kappa_-(\mathcal{L})$) die kleinste obere Schranke für die Dimension von positiven (bzw. negativen) Teilräumen von $\mathcal{L}$. Für einen definisierbaren selbstadjungierten Operator A im Kreinraum $\mathcal{K}$ und für ein $t \in \mathbb{R}$ bezeichne $\kappa_+(t, A)$ (bzw. $\kappa_-(t, A)$) das Minimum der Zahlen $\kappa_+(E(\Delta)\mathcal{K})$ (bzw. $\kappa_-(E(\Delta)\mathcal{K})$), wobei Δ über alle offenen Mengen $\Delta \in \mathcal{R}_A$ mit $t \in \Delta$ läuft, und wir setzen

$$\kappa(t, A) := \min(\kappa_+(t, A), \kappa_-(t, A)).$$

Diese Zahl ist positiv genau dann, wenn $t \in c(A)$ ist (vgl Satz 1.17). Mit $c_\infty(A)$ bezeichnen wir die Menge aller $t \in c(A)$ für die $\kappa(t, A) = \infty$ gilt, und Π sei die Klasse aller definisierbaren selbstadjungierten Operatoren A in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ mit $\sigma_{0,\infty}(A) = \emptyset$ und $c_\infty(A) = \emptyset$.

Satz 1.24 *Es seien A_0 und A_1 zwei selbstadjungierte Operatoren in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ mit $\rho(A_0) \cap \rho(A_1) \neq \emptyset$, und*

$$(A_1 - \lambda)^{-1} - (A_0 - \lambda)^{-1} \textit{ ist kompakt}$$

für ein (und damit für alle) $\lambda \in \rho(A_0) \cap \rho(A_1)$. Falls A_0 stark stabil ist, so gehört A_1 zur Klasse Π.

Korollar 1.25 *Die Klasse Π ist abgeschlossen unter selbstadjungierten, kompakten Störungen, das heißt, falls $A \in \Pi$ und B ein im Kreinraum selbstadjungierter und kompakter Operator ist, so ist $A + B \in \Pi$.*

1.8 Sobolevräume

In Abschnitt 4.3 benötigen wir Sobolevräume und den Sobolevschen Einbettungssatz in einem einfachen Spezialfall. Die folgenden Definitionen und Aussagen findet man z.B. in [Ber].

Es sei Ω ein beschränktes offenes Intervall in $\mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Mit $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller komplexwertigen Funktionen, die auf $\overline{\Omega}$ definiert sind und dort k-mal stetig differenzierbar sind. So wird $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ mittels

$$\|f\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} := \max_{x\in\overline{\Omega}\,,\, j\leq k} |f^{(j)}(x)| \quad \text{für } f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$$

zu einem Banachraum. Wir setzen $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) := \bigcap_{k=1}^\infty \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$. Für eine Funktion f, $f \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$, definieren wir folgende Norm:

$$\|f\|_{\mathrm{W}_2^k(\Omega)} := \left(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|f^{(k)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Definition 1.26 *Die Vervollständigung des Raumes $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{W}_2^k(\Omega)}$ wird der Sobolevraum $\mathrm{W}_2^k(\Omega)$ genannt.*

Der Raum $\mathrm{W}_2^k(\Omega)$, versehen mit

$$(f,g)_k := \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx + \int_\Omega f^{(k)}(x)\overline{g^{(k)}(x)}\,dx \quad \text{für } f,g \in \mathrm{W}_2^k(\Omega),$$

ist ein Hilbertraum, und nach [Ber, S. 16] gilt folgendes Lemma:

Lemma 1.27 *Folgende Normen auf $\mathrm{W}_2^k(\Omega)$ sind äquivalent :*

(1) $f \mapsto \sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)}$,

(2) $f \mapsto \left(\sum_{j=0}^k \|f^{(j)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$,

(3) $f \mapsto \left(\|f\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)} + \|f^{(k)}\|^2_{\mathrm{L}_2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Für den hier eingeführten Sobolevraum $\mathrm{W}_2^k(\Omega)$ gilt folgende Charakterisierung (vgl. [We, 6.4]):

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_2^k(\Omega) \;=\; \{f : \Omega \to \mathbb{C} : {} & f, f', \ldots, f^{(k-2)} \text{ sind stetig differenzierbar in } \Omega, \\ & f^{(k-1)} \text{ ist absolut stetig in } \Omega, \text{ und } f^{(k)} \in \mathrm{L}_2(\Omega)\}.\end{aligned}$$

Weiter unten benötigen wir den folgenden Spezialfall des Sobolevschen Einbettungssatzes.

Satz 1.28 *Es sei Ω ein beschränktes offenes Intervall in $\mathbb{R}$, und es sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathrm{W}_2^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^{k-1}(\overline{\Omega}),$$

und die Einbettungsabbildung ist stetig, d.h. , es existiert ein $M_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k-1}(\overline{\Omega})} \leq M_k \|f\|_{\mathrm{W}_2^k(\Omega)} \text{ für } f \in \mathrm{W}_2^k(\Omega).$$

1.9 Einige Aussagen über Gelfandtripel

In diesem Abschnitt sei $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum, A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator in $\mathcal{H}$ mit nichtleerer Resolventenmenge. Die folgenden Bezeichnungen und Aussagen über Gelfandtripel von $\mathcal{H}$ und Erweiterungen von A und A^* sind in [Ber] und [JL2] zu finden.

Die in $\mathcal{H}$ dichte lineare Menge $\mathcal{D}(A^*)$, versehen mit dem positiv definiten Skalarprodukt

$$(x,y)_+ := (x,y) + (A^*x, A^*y) \text{ für } x,y \in \mathcal{D}(A^*) \tag{1.3}$$

und der zugehörigen Norm $\|x\|_+ := (x,x)_+^{\frac{1}{2}}$, wird mit $\mathcal{H}_+$ bezeichnet. Da A^* abgeschlossen ist, ist $\mathcal{H}_+$ ein Hilbertraum. Wir definieren für $x \in \mathcal{H}$:

$$\|x\|_- := \sup_{y\neq 0\ ,\ y\in\mathcal{H}_+} \frac{|(x,y)|}{\|y\|_+}. \tag{1.4}$$

Mit $\mathcal{H}_-$ bezeichnen wir die Vervollständigung von $\mathcal{H}$ bezüglich $\|\cdot\|_-$. Da $\|\cdot\|_-$ ein positiv definites Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_-$ erzeugt, ist $(\mathcal{H}_-, (\cdot,\cdot)_-)$ ein Hilbertraum. Es gilt

$$\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-.$$

Für $x \in \mathcal{H}$ gilt $\|x\|_- \leq \|x\|$. Falls man in (1.3) A durch A^* ersetzt, erhält man ebenfalls ein solches Tripel

$$\mathcal{H}_+^{(*)} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-^{(*)}.$$

Hierbei ist $\mathcal{H}_+^{(*)}$ die lineare Menge $\mathcal{D}(A)$, versehen mit dem positiv definiten Skalarprodukt

$$(x,y)_+^{(*)} := (x,y) + (Ax, Ay) \text{ für } x,y \in \mathcal{D}(A),$$

$\|x\|_+^{(*)} := ((x,x)_+^{(*)})^{\frac{1}{2}}$, und das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_-^{(*)}$ in $\mathcal{H}_-^{(*)}$ ist analog zu (1.4) definiert. Wir nennen $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-$ und $\mathcal{H}_+^{(*)} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-^{(*)}$ die von A erzeugten Gelfandtripel. Für $x, y \in \mathcal{H}$ gilt

$$|(x,y)| \leq \|x\|_- \|y\|_+.$$

Also ist $(\cdot,\cdot)$ stetig erweiterbar auf $\mathcal{H}_- \times \mathcal{H}_+$ (bzw. auf $\mathcal{H}_+ \times \mathcal{H}_-$, falls man die Einträge vertauscht). Analog gilt $|(x,y)| \leq \|x\|_-^{(*)} \|y\|_+^{(*)}$ für $x, y \in \mathcal{H}$, und $(\cdot,\cdot)$ ist stetig erweiterbar auf $\mathcal{H}_-^{(*)} \times \mathcal{H}_+^{(*)}$ (bzw. auf $\mathcal{H}_+^{(*)} \times \mathcal{H}_-^{(*)}$). Diese Erweiterungen von $(\cdot,\cdot)$ bezeichnen wir wieder mit $(\cdot,\cdot)$. Insbesondere gilt für jedes $y \in \mathcal{H}_+$: $(\cdot, y) \in \mathcal{H}_-'$. Diesen Sachverhalt drücken wir auch folgendermaßen aus: Es gilt $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_-'$ bezüglich $(\cdot,\cdot)$. Es läßt sich zeigen, daß neben $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H}_-'$ bezüglich $(\cdot,\cdot)$ auch $\mathcal{H}_-' \subset \mathcal{H}_+$ bezüglich $(\cdot,\cdot)$ gilt, d.h., zu jedem Funktional f aus $\mathcal{H}_-'$ gibt es ein $x \in \mathcal{H}_+$ mit $f(y) = (y, x)$. Es gilt also $\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_-'$ bezüglich $(\cdot,\cdot)$. Ebenso gilt $\mathcal{H}_- = \mathcal{H}_+'$, $\mathcal{H}_+^{(*)} = (\mathcal{H}_-^{(*)})'$ und $\mathcal{H}_-^{(*)} = (\mathcal{H}_+^{(*)})'$ bezüglich $(\cdot,\cdot)$.

Die Operatoren A und, allgemeiner, $A - z$ für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ lassen sich per Stetigkeit fortsetzen zu stetigen Operatoren $\widetilde{A}$ und $(A-z)^{\sim}$ von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}_-$. Weiterhin läßt sich auch die Resolvente $R(z) := (A-z)^{-1}$, $z \in \rho(A)$, von A per Stetigkeit fortsetzen zu einer Bijektion von $\mathcal{H}_-$ auf $\mathcal{H}$, welche mit $\widetilde{R}(z)$ bezeichnet wird. Dann gilt für $x \in \mathcal{H}_+$ und $y \in \mathcal{H}_-$

$$\widetilde{R}(z) = ((A-z)^{\sim})^{-1}, \quad ((A^* - \overline{z})x, \widetilde{R}(z)y) = (x, y).$$

Aus der Resolventengleichung ergibt sich

$$\widetilde{R}(z) - \widetilde{R}(z') = (z - z')R(z)\widetilde{R}(z') \quad \text{für } z, z' \in \rho(A).$$

Wenn man A durch A^* und $\mathcal{H}_\pm$ durch $\mathcal{H}_\pm^{(*)}$ ersetzt, kann man obige Überlegungen wiederholen. Man erhält dann stetige Operatoren $\widetilde{A^*}$, $(A^* - z)^{\sim}$, $z \in \mathbb{C}$, von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}_-^{(*)}$ und Bijektionen $\widetilde{R^*}(z)$ von $\mathcal{H}_-^{(*)}$ auf $\mathcal{H}$ für $z \in \rho(A^*)$, so daß für $x \in \mathcal{H}_+^{(*)}$ und $y \in \mathcal{H}_-^{(*)}$ gilt

$$\widetilde{R^*}(z) = ((A^* - z)^{\sim})^{-1}, \quad ((A-z)x, \widetilde{R^*}(\overline{z})y) = (x, y).$$

Im folgenden Lemma beweisen wir, daß zwei Operatoren mit demselben Definitionsbereich äquivalente Tripel erzeugen.

Lemma 1.29 *Es seien A, B zwei abgeschlossene, dicht definierte Operatoren in $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$, und es gelte $\rho(A) \neq \emptyset$, $\rho(B) \neq \emptyset$. Es seien*

$$\begin{gathered}
(x,y)_+^A := (x,y) + (Ax, Ay), \quad \|x\|_+^A := ((x,x)_+^A)^{\frac{1}{2}} \ \textit{für } x, y \in \mathcal{D}(A),\\
(x,y)_+^B := (x,y) + (Bx, By), \quad \|x\|_+^B := ((x,x)_+^B)^{\frac{1}{2}} \ \textit{für } x, y \in \mathcal{D}(B),\\
\mathcal{H}_+^A := (\mathcal{D}(A), (\cdot,\cdot)_+^A) \ \textit{und } \mathcal{H}_+^B := (\mathcal{D}(B), (\cdot,\cdot)_+^B).
\end{gathered}$$

Dann sind $\|x\|_+^A$ und $\|x\|_+^B$ zwei äquivalente Normen.

Beweis. Wie schon bei (1.3) sind $\mathcal{H}_+^A$ und $\mathcal{H}_+^B$ Hilberträume. Wir setzen für $x, y \in \mathcal{D}(A)$

$$(x,y)_* := (x,y)_+^A + (x,y)_+^B = 2(x,y) + (Ax, Ay) + (Bx, By)$$

und $\|x\|_* := (x,x)_*^{\frac{1}{2}}$. Wiederum ist $(\mathcal{D}(A), (\cdot,\cdot)_*) = (\mathcal{D}(B), (\cdot,\cdot)_*)$ ein Hilbertraum. Es sei I die Identität von $(\mathcal{D}(A), (\cdot,\cdot)_*)$ nach $\mathcal{H}_+^A$. I ist stetig und bijektiv und nach dem Satz von der offenen Abbildung existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so daß für $x \in \mathcal{D}(A)$ gilt:

$$M\|x\|_* \leq \|x\|_+^A \leq \|x\|_*.$$

Ersetzt man A durch B so erhält man mit denselben Argumenten, daß $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_+^B$ äquivalent sind. $\square$

Nun setzen wir weiterhin voraus, daß zusätzlich zum Hilbertraumskalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $\mathcal{H}$ noch eine hermitesche Sesquilinearform $[\cdot,\cdot]$ gegeben sei, so daß $(\mathcal{H},[\cdot,\cdot])$ ein Kreinraum ist. Wir nehmen an, daß für $x,y \in \mathcal{H}$, $[x,y] = (Jx,y)$ erfüllt ist, mit einer geeigneten Fundamentalsymmetrie J. Ferner sei A im Kreinraum $(\mathcal{H},[\cdot,\cdot])$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$A^* = JAJ,$$

woraus sich folgendes Lemma ableitet (vgl. [JL2, S. 213-214]):

Lemma 1.30 *Die Fundamentalsymmetrie J ist eine Isometrie von $\mathcal{H}_+$ auf $\mathcal{H}_+^{(*)}$ und von $\mathcal{H}_+^{(*)}$ auf $\mathcal{H}_+$.*

Kapitel 2

Definisierbare Funktionen

2.1 Definisierbare Funktionen in der oberen Halbebene

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Definitionen und Aussagen aus [Jon3], die wir in Abschnitt 3.4 benötigen.

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Für einen Operator A aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ setzen wir $\operatorname{Re} A := \frac{1}{2}(A + A^*)$ und $\operatorname{Im} A := \frac{1}{2i}(A - A^*)$. Die Menge der meromorphen $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertigen Funktionen G in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $G(\overline{z}) = G(z)^*$ für alle z, für die G holomorph ist, so daß G in i und $-i$ holomorph ist, werde mit $M_i(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ bezeichnet. Für einen Banachraum X bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_{i,-i}(X)$ die Menge aller Funktionen der Form

$$\xi \mapsto d_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k(\xi - i)^{-k} + \sum_{j=1}^{n} d_{-j}(\xi + i)^{-j}$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $d_l \in \mathbb{C}$, $l = -n, \ldots, 0, \ldots, n$. Wir setzen $\mathcal{R}_{i,-i}(\mathbb{C}) =: \mathcal{R}_{\mathrm{i},-\mathrm{i}}$. Mit $\mathcal{R}^s_{i,-i}$ ($\mathcal{R}^s_{i,-i}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$) bezeichnen wir die Menge der Funktionen f aus $\mathcal{R}_{i,-i}$ (bzw. $\mathcal{R}_{i,-i}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$, für die $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ (bzw. $f(\overline{z}) = f(z)^*$) gilt.

Definition 2.1 *Eine Funktion $G \in M_i(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ wird definisierbar genannt, wenn es eine Funktion $r \in \mathcal{R}^s_{i,-i}$ gibt, so daß*

$$r(z)G(z) = N(z) + n(z) \;\; \textit{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

gilt, wobei N eine $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertige Nevanlinna-Funktion ist (d.h. N ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $N(\overline{z}) = N(z)^*$ und $\operatorname{Im} z \operatorname{Im} N(z) \geq 0$) und $n \in \mathcal{R}^s_{i,-i}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ gilt. Eine Funktion $r \in \mathcal{R}^s_{i,-i}$ mit diesen Eigenschaften heißt definisierende Funktion für G.

Wird $\operatorname{Re} N(i) = 0$ vorausgesetzt, so sind N und n eindeutig durch G und r bestimmt. Die Menge der definisierbaren Funktionen aus $M_i(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ werde mit $D_i(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ bezeichnet.

Definition 2.2 *Eine Funktion* $G \in D_i(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ *heißt gleichmäßig definisierbar, wenn es eine definisierende Funktion* $r \in \mathcal{R}^s_{i,-i}$ *für* G *gibt, deren Nullstellen im Holomorphiegebiet von* G *liegen.*

Lemma 2.3 *Es sei* $G \in D_i(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ *gleichmäßig definisierbar. Dann gibt es zwei* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$*-wertige positive Maße* Σ_+ *und* Σ_- *auf* $\mathbb{R}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle* $x \in \mathcal{H}$ *gilt*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + t^2)^{-1} \, d(\Sigma_\pm(t)x, x) < \infty.$$

(b) *Die Abschließungen von* $\operatorname{supp} \Sigma_+$ *und* $\operatorname{supp} \Sigma_-$ *in* $\hat{\mathbb{R}}$ *sind disjunkt.*

Es gilt

$$G(z) = Az + B + \int_{\mathbb{R}} ((t-z)^{-1} - t(1+t^2)^{-1}) \, d\Sigma_+(t) - \int_{\mathbb{R}} ((t-z)^{-1} - t(1+t^2)^{-1}) \, d\Sigma_-(t), \tag{2.1}$$

wobei A *und* B *beschränkte selbstadjungierte Operatoren sind mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *A ist entweder nichtnegativ oder nichtpositiv.*

(2) *Ist* $A \neq 0$ *und nichtnegativ, dann ist* $\operatorname{supp} \Sigma_-$ *beschränkt.*

(3) *Ist* $A \neq 0$ *und nichtpositiv, dann ist* $\operatorname{supp} \Sigma_+$ *beschränkt.*

Sind andererseits Σ_+ *und* Σ_- *zwei positive* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$*-wertige Maße auf* $\mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften* (a) *und* (b) *und sind* A *und* B *beschränkte selbstadjungierte Operatoren mit den Eigenschaften* (1)-(3), *dann ist* G *definiert durch* (2.1) *gleichmäßig definisierbar.*

Ist speziell G *holomorph bei* ∞, *dann ist* G *genau dann gleichmäßig definisierbar, wenn* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$*-wertige positive Maße* $\tilde{\Sigma}_+$ *und* $\tilde{\Sigma}_-$ *mit kompaktem Träger existieren, so daß* $\operatorname{supp} \tilde{\Sigma}_+ \cap \operatorname{supp} \tilde{\Sigma}_- = \emptyset$ *und*

$$G(z) = C + \int_{\mathbb{R}} (t - z)^{-1} \, d\tilde{\Sigma}_+(t) - \int_{\mathbb{R}} (t - z)^{-1} \, d\tilde{\Sigma}_-(t)$$

gilt, wobei C *ein beschränkter selbstadjungierter Operator ist.*

Für den Beweis dieses Lemmas verweisen wir auf [Jon3]

2.2 Definisierbare Funktionen im Einheitskreis

In diesem Abschnitt wiederholen wir einige Definitionen aus [Jon2] und geben einen Darstellungssatz für definisierbare Funktionen an.

Es sei $\mathcal{H}$ wieder ein Hilbertraum. Für einen Banachraum X sei $\mathcal{R}_{0,\infty}(X)$ die Menge aller Funktionen $z \mapsto \sum_{j\in I} c_j z^j$ einer komplexen Variablen z mit $c_j \in X$, wobei I eine endliche Teilmenge der ganzen Zahlen ist. Wir setzen $\mathcal{R}_{0,\infty} := \mathcal{R}_{0,\infty}(\mathbb{C})$. Mit $\mathcal{R}^s_{0,\infty}$ ($\mathcal{R}^s_{0,\infty}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$) bezeichnen wir die Menge aller Funktionen $g \in \mathcal{R}_{0,\infty}$ ($\mathcal{R}_{0,\infty}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$), für die $g(z) = \overline{g(\overline{z}^{-1})}$ (bzw. $g(z) = g(\overline{z}^{-1})^*$) gilt. Die Menge aller im offenen Einheitskreis $\mathbb{D}$ meromorphen $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertigen Funktionen, die holomorph im Nullpunkt sind, wird mit $M_0(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ bezeichnet. Außerhalb von $\mathbb{D}$ sollen die Funktionen $F \in M_0(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ durch folgende Beziehung fortgesetzt werden: $F(\overline{z}^{-1}) = -F(z)^*$ für $z \in \mathbb{D}$. Die Menge aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, für die F nicht analytisch in z fortgesetzt werden kann, wird das Spektrum von F genannt und mit $\sigma(F)$ bezeichnet.

Definition 2.4 *Eine Funktion $F \in M_0(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ heißt definisierbar, falls F die folgende Darstellung erlaubt:*

$$g(z)F(z) = H(z) + ih(z) \quad \textit{für} \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.2}$$

wobei $g \in \mathcal{R}^s_{0,\infty}$ gilt, H holomorph in $\mathbb{D}$ mit Re $H(z) \geq 0$ *für $z \in \mathbb{D}$ ist und $h \in \mathcal{R}^s_{0,\infty}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ gilt. Eine Funktion $g \in \mathcal{R}^s_{0,\infty}$ mit dieser Eigenschaft wird definisierende Funktion für F genannt.*

Es sei $\varphi(z) := i(1+z)(1-z)^{-1}$ und $G \in M_i(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathcal{H}))$ sei definisierbar im Sinne der Definition 2.1. Wir setzen $F(z) := -iG(\varphi(z))$ für $\varphi(z)$ aus dem Holomorphiegebiet von G. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß F definisierbar im Sinne der Definition 2.4 ist.

In Kapitel 4 benötigen wir den folgenden Satz (vgl. [Jon3]). Wir geben ihn hier nur für den Spezialfall $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ an.

Satz 2.5 *Sei $F \in M_0(\mathbb{C})$ definisierbar. Dann existieren ein Kreinraum $(\widetilde{\mathcal{K}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathcal{K}}})$, ein definisierbarer unitärer Operator $\widetilde{U}$ in $\widetilde{\mathcal{K}}$ und ein $x \in \widetilde{\mathcal{K}}$ mit*

(1) $\widetilde{\mathcal{K}} = \mathrm{cls}\{\widetilde{U}^n x | n \in \mathbb{Z}\}$.

(2) $\sigma(F) = \sigma(\widetilde{U})$.

(3) $F(z) = i\,\mathrm{Im}\,F(0) + [(\widetilde{U}+z)(\widetilde{U}-z)^{-1}x, x]_{\widetilde{\mathcal{K}}}$ *für* $z \notin \sigma(\widetilde{U})$.

(4) *Jede definisierende Funktion g für F ist eine definisierende Funktion von $\widetilde{U}$.*

Es seien $\widetilde{\mathcal{K}}$ ein Kreinraum und $\widetilde{U}$ ein definisierbarer unitärer Operator in $\widetilde{\mathcal{K}}$ mit $c_\infty(\widetilde{U}) = \emptyset$, die (1) und (3) erfüllen. Sind $\widehat{\mathcal{K}}$ ein Kreinraum und $\widehat{U}$ ein unitärer Operator in $\widehat{\mathcal{K}}$, die ebenfalls (1) und (3) erfüllen, so sind $\widetilde{U}$ und $\widehat{U}$ unitär äquivalent.

Jede Funktion $F \in M_0(\mathbb{C})$, die (3) mit einem definisierbaren unitären Operator $\widetilde{U}$ erfüllt, ist definisierbar. Jede definisierende Funktion von $\widetilde{U}$ ist auch definisierend für F.

Im folgenden beschreiben wir in groben Zügen die Konstruktion eines Kreinraumes $\widetilde{\mathcal{K}}$ und eines unitären Operators $\widetilde{U}$ in $\widetilde{\mathcal{K}}$, die die Eigenschaften (1)-(4) haben. Dazu sei $F \in M_0(\mathbb{C})$ eine definisierbare Funktion. Mit $H(K)$ bezeichnen wir den Raum der lokalholomorphen Funktionen über einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}$, versehen mit der üblichen Topologie (siehe [Kth, §27.4]). Es sei $\sigma_0(F) := \sigma(F) \setminus \mathbf{T}$, wobei $\mathbf{T}$ die Einheitskreislinie $\mathbf{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist. Da F eine definisierbare Funktion ist, besteht $\sigma_0(F) \cap \mathbb{D}$ aus endlich vielen Punkten $\mu_1, \ldots, \mu_k$, die Polstellen von F in $\mathbb{D}$ sind. Mit $r_1, \ldots, r_k$ bezeichnen wir die Ordnungen dieser Pole.
Wir definieren für $f, g \in H(\mathbf{T}) \times H(\sigma_0(F))$

$$[f,g] \;:=\; -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{C}} F(z) f(z)\overline{g(\overline{z}^{-1})}(iz)^{-1}\,dz,$$

wobei $\mathcal{C}$ der orientierte Rand einer endlichen Vereinigung G glatter Gebiete ist, in der $\mathbf{T}\cup\sigma_0(F)$ liegt, so daß $f(z)$ und $g(\overline{z}^{-1})$ für $z \in \overline{G}$ definiert sind und $0 \notin \overline{G}$ ist. Dann ist $[\cdot,\cdot]$ eine hermitesche Sesquilinearform. Auf dem Raum $H(\mathbf{T})\times H(\sigma_0(F))$ betrachten wir folgendes positiv semidefinites Skalarprodukt

$$\begin{aligned}(f,g)_S \;:=\; & \sum_{k=0}^{m+2}\int_0^{2\pi} f_1^{[k]}(e^{i\theta})\overline{g_1^{[k]}(e^{i\theta})}\,d\theta + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{r_j} f_2^{[l-1]}(\mu_j)\overline{g_2^{[l-1]}(\mu_j)} + \\ & + \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=1}^{r_j} f_2^{[l-1]}(\overline{\mu}_j^{-1})\overline{g_2^{[l-1]}(\overline{\mu}_j^{-1})},\end{aligned}$$

für $f = \binom{f_1}{f_2}$, $g = \binom{g_1}{g_2}$, falls $f_1, g_1 \in H(\mathbf{T})$ und $f_2, g_2 \in H(\sigma_0(F))$ sind. Hierbei ist

$$f^{[0]}(z) := f(z), \quad f^{[j]} := iz(df^{[j-1]}/dz)(z), \quad j = 1, 2, \ldots\,.$$

Wir definieren $N := \{f \in H(\mathbf{T}) \times H(\sigma_0(F)) : (f,f)_S = 0\}$ und betrachten den Quotientenraum $H := (H(\mathbf{T}) \times H(\sigma_0(F)))\,/N$. Auf H ist $(\cdot,\cdot)_S$ ein positiv definites Skalarprodukt. Wählt man m größer als die größte Ordnung der Nullstellen von g auf $\mathbf{T}$, wobei g eine definisierende Funktion von F ist (vgl. [Jon3]), so ist $[\cdot,\cdot]$ stetig bezüglich der durch $(\cdot,\cdot)_S$ induzierten Norm $\|\cdot\|_S$ auf H. Mit $\mathcal{K}'$ bezeichnen wir die Vervollständigung des Raumes H bezüglich $\|\cdot\|_S$, und wir bezeichnen wiederum mit $[\cdot,\cdot]$ die Erweiterung von $[\cdot,\cdot]$ per Stetigkeit auf ganz $\mathcal{K}'$.

Es sei U der Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen in H, das bedeutet $U : H \to H$ sei definiert mittels $(Uf)(z) := zf(z)$. Offenbar ist U eine Isometrie bezüglich $[\cdot,\cdot]$ und stetig bezüglich der Norm $\|\cdot\|_S$. Mit U' bezeichnen wir die Erweiterung von U auf $\mathcal{K}'$. U' ist ein Isomorphismus von $\mathcal{K}'$ und eine Isometrie bezüglich $[\cdot,\cdot]$.

Da $[\cdot,\cdot]$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_S$ ist, existiert ein beschränkter selbstadjungierter Operator G im Hilbertraum $(\mathcal{K}', (\cdot,\cdot)_S)$, so daß gilt

$$[x, y] = (Gx, y)_S \quad \text{für } x, y \in \mathcal{K}'.$$

Der Raum $\mathcal{K}'$ hat die Zerlegung $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'_+ \oplus \mathcal{K}'_- \oplus \mathcal{K}'_0$, wobei $\mathcal{K}'_0$ der isotrope Teilraum von $\mathcal{K}'$ bezüglich $[\cdot,\cdot]$ ist, und $\mathcal{K}'_+ := E_+\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}'_- := E_-\mathcal{K}'$ sind. Dabei ist E_+ (E_-) der Spektralprojektor von G ist, der zum Intervall $(0,\infty)$ ($(-\infty, 0)$) gehört. $\mathcal{K}'_+$, $\mathcal{K}'_-$ sind Unterräume von $\mathcal{K}'$ mit $[x,x] > 0$ (bzw. < 0) für $0 \neq x \in \mathcal{K}'_+$ (bzw. $\mathcal{K}'_-$). Es seien $(\mathcal{K}_+, [\cdot,\cdot])$ und $(\mathcal{K}_-, -[\cdot,\cdot])$ die Vervollständigungen von $(\mathcal{K}'_+, [\cdot,\cdot])$ und $(\mathcal{K}'_-, -[\cdot,\cdot])$. Wir setzen $\widetilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K}_+ + \mathcal{K}_-$ und versehen $\widetilde{\mathcal{K}}$ mit dem inneren Produkt $[x,y]_{\widetilde{\mathcal{K}}} := [x_+, y_+] + [x_-, y_-]$ für $x = x_+ + x_-$, $y = y_+ + y_-$, falls $x_\pm, y_\pm \in \mathcal{K}_\pm$. Dann ist $(\widetilde{\mathcal{K}}, [\cdot,\cdot]_{\widetilde{\mathcal{K}}})$ ein Kreinraum, der den Raum $\mathcal{K}'_+ \oplus \mathcal{K}'_-$, welchen man auch als Quotientenraum $\mathcal{K}'/\mathcal{K}'_0$ auffassen kann, als dichten Teilraum enthält. Mit Hilfe des Kreinschen Lemma [DLdS2] läßt sich U' zu einem beschränkten linearen Operator in $\widetilde{\mathcal{K}}$ erweitern. Diesen Operator bezeichnen wir mit $\widetilde{U}$. $\widetilde{U}$ ist dann ein unitärer Operator in $\widetilde{\mathcal{K}}$. Es zeigt sich, daß der so definierte Kreinraum $\widetilde{\mathcal{K}}$ und der Operator $\widetilde{U}$ die Eigenschaften (1)-(4) von Satz 2.5 haben.

Es sei F eine definisierbare Funktion, dann bezeichnen wir den oben konstruierten Kreinraum $\widetilde{\mathcal{K}}$ mit $\mathcal{K}_F$. Für den Fall $c_\infty(\widetilde{U}) = \emptyset$ ist dieser Kreinraum bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, und nur diesen Fall werden wir in Kapitel 4 betrachten. Analog bezeichnen wir den oben konstruierten Operator $\widetilde{U}$ mit U_F. Der Operator U_F wird im folgenden auch der *Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Variablen in* $\mathcal{K}_F$ genannt.

Kapitel 3

Die Operatorfunktion T und ihre Linearisierung L

3.1 Linearisierung

Mit $\mathrm{D}_\mathrm{r}^\mathrm{c}$ bezeichnen wir die Teilmenge von $\mathbb{C}$, die definiert ist durch $\mathrm{D}_\mathrm{r}^\mathrm{c} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \mathrm{r}\}$.

Es sei $\mathcal{H}$ ein Kreinraum, D ein dicht definierter, abgeschlossener Operator in $\mathcal{H}$, und D habe nichtleere Resolventenmenge. Weiterhin sei $\mathcal{D}_Q$ eine offene Teilmenge von $\hat{\mathbb{C}}$, und Q sei eine holomorphe Funktion auf $\mathcal{D}_Q$ mit Werten in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Q habe folgende Eigenschaften:

a) $\mathcal{D}_Q = \mathcal{D}_Q^*$ und es existiere ein $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$, so daß $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \mathrm{r}\} \cup \{\infty\} \subseteq \mathcal{D}_\mathrm{Q}$.

b) Für alle $z \in \mathcal{D}_Q$ gelte $Q(z) = Q(\overline{z})^+$.

Wir wenden uns nun folgenden Gleichungen in $\mathcal{H}$ zu, wobei $y, g \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in \mathcal{D}_Q$ sind,

$$-Dy + \lambda y + Q(\lambda)y = g, \tag{3.1}$$

$$-Dy + \lambda y + Q(\lambda)y = 0. \tag{3.2}$$

Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichungen (3.1) und (3.2) werden wir im folgenden mit

$$T(\lambda)y := -Dy + \lambda y + Q(\lambda)y$$

bezeichnen. Die Operatorfunktion $T(\lambda)$ ist definiert für $\lambda \in \mathcal{D}_Q$ auf $\mathcal{D}(D)$.

Nach [DLdS1, Theorem 3] existieren ein Kreinraum $\mathcal{K}$, ein beschränkter selbstadjungierter Operator A in $\mathcal{K}$ und eine Abbildung $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, so daß $\mathrm{D}_\mathrm{r}^\mathrm{c} \subseteq \rho(A)$ ist, und für $\lambda \in \mathrm{D}_\mathrm{r}^\mathrm{c}$ gilt

$$Q(\lambda) = Q(\infty) + \Gamma^+(A - \lambda)^{-1}\Gamma. \tag{3.3}$$

Der Kreinraum $\mathcal{K}$ kann in einem gewissen Sinne minimal gewählt werden (vgl. [DLdS1, Theorem 3]). Wir werden dies aber erst unter spezielleren Voraussetzungen tun.

In diesem und den beiden folgenden Abschnitten setzen wir voraus, daß ein beschränkter selbstadjungierter Operator A in einem Kreinraum $\mathcal{K}$ mit $\mathrm{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{c}} \subset \rho(A)$ und $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ gegeben sind, $Q(\infty)$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ ist und eine Operatorfunktion Q durch (3.3) erklärt ist. Dann erfüllt Q mit $\mathcal{D}_Q = \rho(A)$ die obigen Bedingungen a) und b). Die Gleichung (3.2) nimmt dann die Form

$$-Dy + \lambda y + Q(\infty)y + \Gamma^{+}(A - \lambda)^{-1}\Gamma y = 0$$

an.

Man erhält ein zu (3.2) äquivalentes Gleichungssystem, wenn man $y_1 := -y$ und $y_2 := -(A - \lambda)^{-1}\Gamma y$ setzt, und somit gilt

$$\begin{aligned} Dy_1 - Q(\infty)y_1 - \Gamma^{+}y_2 &= \lambda y_1, \\ -\Gamma y_1 + Ay_2 &= \lambda y_2. \end{aligned}$$

Mit $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ wird das Problem (3.2) zu

$$\begin{bmatrix} D - Q(\infty) & -\Gamma^{+} \\ -\Gamma & A \end{bmatrix} \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y} = 0, \tag{3.4}$$

und das Problem (3.1) ist äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} D - Q(\infty) & -\Gamma^{+} \\ -\Gamma & A \end{bmatrix} \mathbf{y} - \lambda \mathbf{y} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

Im folgenden werde mit $\mathbf{L}$ der Operator in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ bezeichnet, der auf $\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \mathcal{D}(D) \oplus \mathcal{K}$ durch die Matrix

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} D - Q(\infty) & -\Gamma^{+} \\ -\Gamma & A \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

definiert ist. $\mathbf{L}$ ist dann ein dicht definierter, abgeschlossener Operator.

3.2 Jordanketten von L und T

Wir betrachten die Operatorfunktion $T(\lambda) = -D + \lambda + Q(\lambda)$ auf $\mathcal{D}(D)$, wobei Q wie in (3.3) für $\lambda \in \rho(A)$ erklärt ist. Wir benötigen zunächst die Definition von Eigenwerten und Jordanketten einer Operatorfunktion (vergleiche z.B. [LMM]).

Definition 3.1 *Ein* $\lambda_0 \in \mathcal{D}_Q$ *wird Eigenwert der Operatorfunktion* T *genannt, falls ein* $y_0 \in \mathcal{D}(D)$, $y_0 \neq 0$, *existiert, mit* $T(\lambda_0)y_0 = 0$. *Wenn es in diesem Fall Elemente* $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *aus* $\mathcal{D}(D)$ *gibt, mit*

$$T(\lambda_0)y_0 = 0, \quad T(\lambda_0)y_1 + \frac{1}{1!}\dot{T}(\lambda_0)y_0 = 0\,, \ldots,$$

$$T(\lambda_0)y_k + \frac{1}{1!}\dot{T}(\lambda_0)y_{k-1} + \ldots + \frac{1}{k!}\overset{(k)}{T}(\lambda_0)y_0 = 0,$$

so heißen die Elemente $y_0, y_1, \ldots, y_k$ *eine Jordankette von* T *bei* λ_0. *Hier bezeichnen* $\dot{T}(\lambda)$, $\ddot{T}(\lambda)$, *usw. die Ableitungen von* T *nach* λ, *also :*

$$\dot{T}(\lambda) = I + \Gamma^+(A-\lambda)^{-2}\Gamma \quad \textit{und} \quad \overset{(j)}{T}(\lambda) = j!\,\Gamma^+(A-\lambda)^{-j-1}\Gamma \quad \textit{für } j > 1.$$

Die Menge aller Eigenwerte von T *wird mit* $\sigma_p(T)$ *bezeichnet.*

Satz 3.2 (1) *Es sei* $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, *und* $y_0, y_1, \ldots, y_k$ *sei eine Jordankette von* T *bei* λ_0 . *Dann ist* $\lambda_0 \in \sigma_p(\mathbf{L})$ *und*

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \begin{bmatrix} -y_0 \\ -(A-\lambda_0)^{-1}\Gamma y_0 \end{bmatrix}, \ldots, \\ \mathbf{y}_k &= \begin{bmatrix} -y_k \\ -\sum_{j=0}^{k}(A-\lambda_0)^{-j-1}\Gamma y_{k-j} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.7}$$

bilden eine Jordankette von $\mathbf{L}$ *bei* λ_0.

(2) *Es sei* $\lambda_0 \in \sigma_p(\mathbf{L}) \cap \rho(A)$, *und* $\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_k$ *sei eine Jordankette von* $\mathbf{L}$ *bei* λ_0. *Dann ist* $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$. *Die Jordankette* $\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_k$ *hat die Form* (3.7), *und die ersten Komponenten dieser Vektoren bilden eine Jordankette von* T *bei* λ_0.

(3) *Es sei* $\lambda \in \rho(D - Q(\infty)) \cap \rho(A)$. *Dann gilt* $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{L})$ *genau dann, wenn* $1 \in \sigma_p(\Gamma^+(A-\lambda)^{-1}\Gamma(D-\lambda-Q(\infty))^{-1})$ *gilt.*

(4) *Für* $\lambda \in \rho(A)$ *ist* $T(\lambda)$ *genau dann invertierbar mit* $T(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *wenn* $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$ *ist. Es gilt*

$$(\mathbf{L}-\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} -T(\lambda)^{-1} & -R(\lambda) \\ -(A-\lambda)^{-1}\Gamma T(\lambda)^{-1} & (A-\lambda)^{-1}(I - \Gamma R(\lambda)) \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

wobei $R(\lambda) := T(\lambda)^{-1}\Gamma^+(A-\lambda)^{-1}$ *sei.*

Beweis. (1) Sei also $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, und $y_0, \ldots, y_k$ sei eine Jordankette von T bei λ_0. Also gilt $-Dy_0 + Q(\infty)y_0 + \lambda_0 y_0 + \Gamma^+(A-\lambda_0)^{-1}\Gamma y_0 = 0$. Somit ist $(\mathbf{L}-\lambda)\mathbf{y}_0 = 0$ und $\lambda_0 \in \sigma_p(\mathbf{L})$. Da $y_0, \ldots, y_k$ eine Jordankette von T ist, ist nach Definition 3.1

$$y_{m-1} = Dy_m - Q(\infty)y_m - \lambda_0 y_m - \sum_{j=0}^{m}\Gamma^+(A-\lambda_0)^{-j-1}\Gamma y_{m-j},$$

und daher gilt für m mit $1 \leq m \leq k$

$$\begin{bmatrix} D - Q(\infty) - \lambda_0 & -\Gamma^+ \\ -\Gamma & A - \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_m \\ -\sum_{j=0}^m (A-\lambda_0)^{-j-1}\Gamma y_{m-j} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -Dy_m + Q(\infty)y_m + \lambda_0 y_m + \sum_{j=0}^m \Gamma^+(A-\lambda_0)^{-j-1}\Gamma y_{m-j} \\ \Gamma y_m - \sum_{j=0}^m (A-\lambda_0)^{-j}\Gamma y_{m-j} \end{bmatrix} = \mathbf{y}_{m-1}.$$

(2) Es sei $\lambda_0 \in \sigma_p(\mathbf{L}) \cap \rho(A)$, und $\mathbf{y}_0, \ldots, \mathbf{y}_k$ sei eine Jordankette von $\mathbf{L}$ bei λ_0 . Es gilt also für m mit $1 \leq m \leq k$: $(\mathbf{L} - \lambda_0)\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_{m-1}$ und $(\mathbf{L} - \lambda_0)\mathbf{y}_0 = 0$. Aus der Konstruktion von $\mathbf{L}$ folgt, daß $\mathbf{y}_0$ bereits die Form (3.7) hat und daß $T(\lambda_0)y_0 = 0$ gilt.

Es bleibt noch zu zeigen, daß, unter der Annahme $\mathbf{y}_{m-1}$ hätte die Form (3.7), auch $\mathbf{y}_m$ von der Form (3.7) ist und $\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \overset{(j)}{T}(\lambda_0)y_{m-j} = 0$ gilt.

Es sei also $\mathbf{y}_m = \begin{bmatrix} -y_m \\ \tilde{y}_m \end{bmatrix}$. Aus $(\mathbf{L} - \lambda_0)\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_{m-1}$ lassen sich folgende zwei Gleichungen ableiten

$$(-D + \lambda_0 + Q(\infty))y_m - \Gamma^+\tilde{y}_m = -y_{m-1}, \tag{3.9}$$

$$\Gamma y_m + (A - \lambda_0)\tilde{y}_m = -\sum_{j=0}^{m-1}(A-\lambda_0)^{-j-1}\Gamma y_{m-1-j}. \tag{3.10}$$

Löst man Gleichung (3.10) nach $\tilde{y}_m$ auf, so erhält man

$$\tilde{y}_m = -\sum_{j=0}^{m}(A-\lambda_0)^{-j-1}\Gamma y_{m-j},$$

also ist $\mathbf{y}_m$ von der Form (3.7), und $\tilde{y}_m$ eingesetzt in (3.9) ergibt zusammen mit (3.3)

$$(-D+\lambda_0+Q(\lambda_0))y_m + y_{m-1} + \Gamma^+(A-\lambda_0)^{-2}\Gamma y_{m-1} + \sum_{j=2}^m \frac{1}{j!}\overset{(j)}{T}(\lambda_0)y_{m-j} = 0. \tag{3.11}$$

Da $\dot{T}(\lambda_0) = I + \Gamma^+(A-\lambda_0)^{-2}\Gamma$ gilt, folgt aus (3.11), daß $\sum_{j=0}^m \frac{1}{j!}\overset{(j)}{T}(\lambda_0)y_{m-j} = 0$ gilt.

(3) ergibt sich durch ein leichtes Nachrechnen.

(4) Es sei $\lambda \in \rho(\mathbf{L}) \cap \rho(A)$. Wir zeigen, daß $T(\lambda)$ bijektiv ist. Angenommen $T(\lambda)$ wäre nicht injektiv, es existiere also ein y, $y \neq 0$, mit $T(\lambda)y = 0$. Dann ist $\lambda \in \sigma_p(T)$. Nach Punkt (1) dieses Satzes wäre dann auch $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{L})$, im Widerspruch zu $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$, also ist $T(\lambda)$ injektiv. Zum Beweis der Surjektivität von $T(\lambda)$ wählen wir ein beliebiges $g \in \mathcal{H}$. Da $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$ ist, existieren $f_1 \in \mathcal{D}(D)$ und $f_2 \in \mathcal{K}$ mit

$$(\mathbf{L} - \lambda)\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D - Q(\infty) - \lambda & -\Gamma^+ \\ -\Gamma & A - \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Löst man die zweite Komponente nach f_2 auf und setzt dies in die erste Komponente ein, so ergibt sich $T(\lambda)(-f_1) = g$, also ist $T(\lambda)$ surjektiv. Die Darstellung (3.8) für $(\mathbf{L} - \lambda)^{-1}$ läßt sich leicht bestätigen. Nun nehmen wir an, daß für ein $\lambda \in \rho(A)$ $T(\lambda)$ invertierbar sei mit $T(\lambda)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann ist die rechte Seite von (3.8) ein auf dem ganzen Raum erklärter, beschränkter Operator, und daher gilt $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$. □

3.3 Aussagen über das Spektrum von A und $\mathbf{L}$

Dazu benötigen wir einige Begriffe und Ergebnisse aus der Theorie der Fredholmoperatoren.

Definition 3.3 *Es sei T ein dicht definierter, abgeschlossener Operator in einem Banachraum X. Wir definieren (vergleiche z.B.* [Ka]*):*

$$\operatorname{nul} T := \dim N(T), \quad \operatorname{def} T := \operatorname{codim} R(T) \quad (:= \dim(X/R(T))).$$

Diese Größen können endlich oder unendlich sein. In dem Fall, daß entweder $\operatorname{nul} T$ *oder* $\operatorname{def} T$ *endlich ist, definieren wir den Index* $\operatorname{ind} T$ *von T durch*

$$\operatorname{ind} T := \operatorname{nul} T - \operatorname{def} T.$$

Der Operator T wird Fredholmoperator genannt, falls $\operatorname{nul} T < \infty$ *und* $\operatorname{def} T < \infty$ *gilt. T wird Semifredholmoperator genannt, wenn $R(T)$ abgeschlossen ist und mindestens eine der Zahlen* $\operatorname{nul} T$, $\operatorname{def} T$ *endlich ist.*

Für einen dicht definierten, abgeschlossenen Operator S bezeichne $\Delta(S)$ die Menge aller Punkte $\lambda \in \mathbb{C}$, so daß $S - \lambda$ ein Fredholmoperator ist. $\Delta_{\mathrm{SF}}(S)$ sei die Menge der komplexen Zahlen λ, so daß $S - \lambda$ ein Semifredholmoperator ist. Wir definieren das essentielle Spektrum $\sigma_{\mathrm{ess}}(S)$ von S durch

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(S) := \mathbb{C} \setminus \Delta(S).$$

Wir benötigen die folgenden Eigenschaften der in Definition 3.3 eingeführten Größen (vgl. [Ka, IV §5.6]).

Satz 3.4 *Die Menge $\Delta_{\mathrm{SF}}(T)$ ist offen. In jeder Zusammenhangskomponente Δ von $\Delta_{\mathrm{SF}}(T)$ ist* $\operatorname{ind}(T - \lambda)$ *konstant und es existiert eine in Δ diskrete Menge Ξ, die auch die leere Menge sein kann, so daß die Größen* $\operatorname{nul}(T - \lambda)$ *und* $\operatorname{def}(T - \lambda)$ *auf $\Delta \setminus \Xi$ konstant und in jeder Umgebung eines Punktes aus Ξ nicht konstant sind. Gilt* $\operatorname{nul}(T - \lambda) = \operatorname{def}(T - \lambda) = 0$ *für $\lambda \in \Delta \setminus \Xi$, so ist $\Delta \setminus \Xi \subseteq \rho(T)$, und die Punkte aus Ξ sind isolierte Eigenwerte von T mit endlicher algebraischer Vielfachheit.*

Nun können wir die Beziehung zwischen den Spektren von $\mathbf{L}$ und A beschreiben.

Satz 3.5 *Für ein (und dann auch für alle) $\mu \in \rho(D)$ sei $(D-\mu)^{-1}$ kompakt. Es existiere eine Folge $(\eta_n)_{n=0}^{\infty}$, $\eta_n \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} |\eta_n| = \infty$, so daß*

$$i\eta_n \in \rho(D) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \|(D-i\eta_n)^{-1}\| = 0$$

gilt. Dann gelten die folgenden Aussagen

(1) $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{L}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$, *und für* $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{L})$ *gilt* $\operatorname{ind}(\mathbf{L}-\lambda) = \operatorname{ind}(A-\lambda)$.

(2) *Falls $\rho(A)$ zusammenhängend ist, gilt* $\sigma(\mathbf{L}) \setminus \sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L}) \subseteq \sigma(A)$.

(3) *Es sei $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma(A)$. Dann gilt* $\sigma(A) \subseteq \sigma(\mathbf{L}) \setminus \sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L})$.

Beweis. (1) Da $(I - Q(\infty)(D-i\eta_n)^{-1})^{-1}$ für genügend große η_n (Neumannsche Reihe) existiert, gilt

$$(D - i\eta_n - Q(\infty))^{-1} = (D-i\eta_n)^{-1}(I - Q(\infty)(D-i\eta_n)^{-1})^{-1}.$$

Also ist $\rho(D-Q(\infty))$ nicht leer und $(D-\lambda-Q(\infty))^{-1}$ ist für alle $\lambda \in \rho(D-Q(\infty))$ kompakt. Die Behauptung (1) folgt mit Hilfe von [ALMS, Theorem 2.2].

(2) Es genügt, $\rho(A) \subseteq \rho(\mathbf{L}) \cup \sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L})$ zu zeigen. Aus dem Beweis von (1) folgt die Existenz eines $N \in \mathbb{N}$ mit

$$i\eta_n \in \rho(D-Q(\infty)) \text{ und } i\eta_n \in \rho(A) \text{ für } n \geq N.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}-T(i\eta_n) =& D - i\eta_n - Q(\infty) - \Gamma^+(A-i\eta_n)^{-1}\Gamma = \\ =& (I - \Gamma^+(A-i\eta_n)^{-1}\Gamma(D-i\eta_n-Q(\infty))^{-1})(D-i\eta_n-Q(\infty)).\end{aligned}$$

Mit $\lim_{n\to\infty}\|(D-i\eta_n)^{-1}\| = 0$ gilt auch $\lim_{n\to\infty}\|(D-i\eta_n-Q(\infty))^{-1}\| = 0$. Daher existiert (Neumannsche Reihe) ein $\mathrm{n}_0 \in \mathbb{N}$ mit $-T(i\eta_{\mathrm{n}_0})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, und nach Satz 3.2 gilt dann $i\eta_{\mathrm{n}_0} \in \rho(\mathbf{L})$. Also existiert insbesondere um $i\eta_{\mathrm{n}_0}$ eine nichtleere, offene Umgebung U_{n_0} mit

$$U_{\mathrm{n}_0} \subseteq \rho(\mathbf{L}) \cap \rho(A).$$

Es sei $\Delta_0(\mathbf{L}) := \{\lambda \in \Delta_{\mathrm{SF}}(\mathbf{L}) : \operatorname{ind}(\mathbf{L}-\lambda) = 0\}$ und wegen (1) gilt insbesondere $\rho(A) \subseteq \Delta_0(A) = \Delta_0(\mathbf{L})$. Da $\rho(A)$ zusammenhängend ist, existiert eine offene, zusammenhängende Menge Δ_0', $\Delta_0' \subseteq \Delta_0(\mathbf{L})$ (Satz 3.4), mit

$$\rho(A) \subseteq \Delta_0'.$$

Für $\lambda \in U_{\mathrm{n}_0}$ gilt $\operatorname{nul}(\mathbf{L}-\lambda) = \operatorname{def}(\mathbf{L}-\lambda) = 0$. Also existiert nach Satz 3.4 eine in Δ_0' diskrete Menge Ξ_0',die auch die leere Menge sein kann, mit

$$\operatorname{nul}(\mathbf{L}-\lambda) = \operatorname{def}(\mathbf{L}-\lambda) = 0 \text{ für } \lambda \in \Delta_0' \setminus \Xi_0'.$$

Dann gilt $\Delta_0' \setminus \Xi_0' \subseteq \rho(\mathbf{L})$. Wegen [Con1, XI Proposition 6.9] und [GGK, XV.2] folgt $\Xi_0' \subseteq \rho(\mathbf{L}) \cup \sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L})$, und somit gilt

$$\rho(A) \subseteq (\Delta_0' \setminus \Xi_0') \cup \Xi_0' \subseteq \rho(\mathbf{L}) \cup \sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L}).$$

(3) Nach [Ka, IV Theorem 5.28] gilt $\sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L}) \cap \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{L}) = \emptyset$, und aus (1) folgt

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{L}) \subseteq \sigma(\mathbf{L}) \setminus \sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L}).$$

□

3.4 Definisierbarkeit von L

Ziel dieses Abschnittes ist es, unter zusätzlichen Vorraussetzungen an Q und D, die Definisierbarkeit von $\mathbf{L}$ zu zeigen.

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß die Funktion Q aus der Gleichung (3.1) eine auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorphe $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertige Funktion mit $Q(z) = Q(\overline{z})^*$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist. Ferner fordern wir, daß Q gleichmäßig definisierbar (vgl. Definition 2.2) sei.

Mit dem nun folgenden Satz aus [Bro, Appendix I] erhalten wir eine Darstellung für Q, mit deren Hilfe sich die Definisierbarkeit von $\mathbf{L}$ zeigen läßt.

Satz 3.6 *Es sei F eine nichtfallende, von rechts starkstetige Funktion, definiert auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mit Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ als Werten. Falls $F(a) = 0$ gilt, existiert ein Hilbertraum $\mathcal{K}$, eine Abbildung $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ und eine Spektralschar E in $\mathcal{K}$ mit*

(1) $E(a) = 0$ *und* $E(b) = I$,

(2) $F(x) = \Gamma^* E(x) \Gamma$ *für* $x \in [a, b]$,

(3) ls $\{E(x)\Gamma h : h \in \mathcal{H} \text{ und } x \in [a, b]\}$ *ist dicht in* $\mathcal{K}$,

(4) *falls* $F(x_1) = F(x_2)$ *für* x_1, x_2 *mit* $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ *erfüllt ist, dann gilt* $E(x_1) = E(x_2)$.

Da Q gleichmäßig definisierbar ist, existieren (s. Lemma 2.3) beschränkte, abgeschlossene Intervalle Δ_+, Δ_- und zugehörige positive $\mathcal{L}(\mathcal{H})$-wertige Maße Σ_+, Σ_- mit $\operatorname{supp} \Sigma_\pm \subset \Delta_\pm$ und $\operatorname{supp} \Sigma_+ \cap \operatorname{supp} \Sigma_- = \emptyset$ und ein in $\mathcal{H}$ beschränkter selbstadjungierter Operator C, so daß Q folgende Darstellung für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ besitzt

$$Q(z) = C + \int (t-z)^{-1} d\Sigma_+(t) - \int (t-z)^{-1} d\Sigma_-(t).$$

Es sei $\Delta_\pm = [a_\pm, b_\pm]$ für $a_\pm, b_\pm \in \mathbb{R}$. Wir setzen $F_+(x) := \Sigma_+((-\infty, x])$ und $F_-(x) := \Sigma_-((-\infty, x])$. Dann ist $F_\pm$ eine nichtfallende, von rechts starkstetige

Funktion mit $F_\pm(a_\pm) = 0$, also erfüllt $F_\pm$ die Vorraussetzungen von Satz 3.6. Daher existieren Hilberträume $\mathcal{K}_\pm$, Abbildungen $\Gamma_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{K}_\pm)$ und Spektralscharen $E_\pm$ in $\mathcal{K}_\pm$ mit den Eigenschaften (1)-(4) aus Satz 3.6. Dann ist

$$Q(z) = C + \int (t-z)^{-1} d\Gamma_+^* E_+(t)\Gamma_+ - \int (t-z)^{-1} d\Gamma_-^* E_-(t)\Gamma_-.$$

Nach [We, Abschnitt 7.2, 7.3 und 7.4] existiert zu jedem $E_\pm$ genau ein in $\mathcal{K}_\pm$ selbstadjungierter, beschränkter Operator $A_\pm$ mit $\sigma(A_\pm) = \operatorname{supp} E_\pm$ und es ist

$$Q(z) = C + \Gamma_+^*(A_+ - z)^{-1}\Gamma_+ - \Gamma_-^*(A_- - z)^{-1}\Gamma_-.$$

Aus Satz 3.6(4) folgt $\sigma(A_\pm) = \operatorname{supp}\Sigma_\pm$ Mit $(\cdot,\cdot)_\pm$ bezeichnen wir das Hilbertraumskalarprodukt von $\mathcal{K}_\pm$. Dann ist $\mathcal{K} := \mathcal{K}_+ \times \mathcal{K}_-$, versehen mit dem üblichen positiv definiten Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_\mathcal{K}$, ein Hilbertraum. Versieht man nun $\mathcal{K}$ mit einem indefiniten Skalarprodukt $[\cdot,\cdot]_\mathcal{K}$,

$$\left[\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right]_\mathcal{K} := (f_1, g_1)_+ - (f_2, g_2)_- \quad \text{für } f_1, g_1 \in \mathcal{K}_+,\ f_2, g_2 \in \mathcal{K}_-, \tag{3.12}$$

so wird $\mathcal{K}$ zu einem Kreinraum. I_+ sei die Identität auf $\mathcal{K}_+$, und I_- sei die Identität auf $\mathcal{K}_-$. Dann ist

$$J_\mathcal{K} := \begin{bmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & -I_- \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

die zugehörige Fundamentalsymmetrie in $\mathcal{K}$. Wir führen einige Bezeichnungen ein. Es seien $A : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ und $\Gamma : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ definiert durch

$$A := \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix}, \quad \Gamma := \begin{pmatrix} \Gamma_+ \\ \Gamma_- \end{pmatrix} \text{ und somit } \Gamma^* = (\Gamma_+^* \ \ \Gamma_-^*). \tag{3.14}$$

Daher gilt dann $\Gamma^+ = \Gamma^* J_\mathcal{K}$. A ist selbstadjungiert im Hilbertraum $(\mathcal{K}, (\cdot,\cdot)_\mathcal{K})$ und selbstadjungiert im Kreinraum $(\mathcal{K}, [\cdot,\cdot]_\mathcal{K})$ mit

$$\sigma(A) = \sigma(A_+) \cup \sigma(A_-) = \operatorname{supp}\Sigma_+ \cup \operatorname{supp}\Sigma_-. \tag{3.15}$$

Ferner gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

$$Q(z) = C + \Gamma^+(A - z)^{-1}\Gamma,$$

womit man jetzt wiederum für Q eine Darstellung der Form (3.3) hat, mit der sich der folgende Satz beweisen läßt.

Satz 3.7 *Es sei Q gleichmäßig definisierbar, D ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$, und $(D-\lambda)^{-1}$ sei für $\lambda \in \rho(D)$ ein kompakter Operator. Ferner seien $\mathcal{K}$ und A wie in* (3.12) *bzw.* (3.14) *definiert. Dann ist der Operator $\mathbf{L}$ in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ definiert durch*

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \mathcal{D}(D) \oplus \mathcal{K}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} D - C & -\Gamma^+ \\ -\Gamma & A \end{bmatrix},$$

definisierbar, und es gilt $\mathbf{L} \in \Pi$.

Beweis. Der Beweis von Satz 3.5(1) ergibt, daß $(D-C-\lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \rho(D-C)$ ein kompakter Operator ist. Nach [Ka, III 6.29] besteht das Spektrum von $D-C$ nur aus isolierten reellen Eigenwerten mit endlicher algebraischer Vielfachheit. Daher ist

$$M := \operatorname{ls}\left\{ \bigcup_{\lambda \leq \|A\|+1} \mathcal{L}_\lambda(D-C) \right\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$. P sei der zugehörige Orthogonalprojektor auf M in $\mathcal{H}$, und wir setzen

$$D_0 := (I-P)(D-C) + (\|A\|+1)P.$$

D_0 ist ein positiver selbstadjungierter Operator in $\mathcal{H}$ mit $D_0 \geq (\|A\|+1)I$. Versieht man $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ zusätzlich mit folgendem inneren Produkt

$$\left[\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right] := (f_1, g_1)_{\mathcal{H}} + [f_2, g_2]_{\mathcal{K}} \quad \text{für} \quad f_1, g_1 \in \mathcal{H},\ f_2, g_2 \in \mathcal{K},$$

wobei $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ das Hilbertraumskalarprodukt von $\mathcal{H}$ ist und $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}}$ durch (3.12) gegeben ist, so wird $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ zu einem Kreinraum. Zunächst beweisen wir, daß

$$\mathrm{L}_0 := \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

stark stabil (s. Definition 1.23) in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ ist. L_0 ist selbstadjungiert im Kreinraum $(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}, [\cdot,\cdot])$ mit $\rho(\mathrm{L}_0) \neq \emptyset$, und L_0 hat nur reelles Spektrum. Aus der Definition von D_0 ergibt sich $\sigma(D_0) \cap \sigma(A) = \emptyset$. Wegen (3.15) und der Tatsache, daß $\operatorname{supp} \Sigma_+$ und $\operatorname{supp} \Sigma_-$ zwei disjunkte kompakte Mengen sind, also einen positiven Abstand voneinander haben, läßt sich ein Polynom p finden, mit:

(1) $p(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$,
(2) $p(x) > 0$ falls $x \in \operatorname{supp} \Sigma_+$,
(3) $p(x) < 0$ falls $x \in \operatorname{supp} \Sigma_-$,
(4) falls $p(x) = 0$ ist, so gilt $x \in \rho(\mathrm{L}_0)$,
(5) $p(x) \geq 0$ falls $|x| \geq \|A\|+1$.

Daher gilt für alle $x = x_0 + x_+ + x_-$ mit $x_0 \in \mathcal{D}(p(D))$ und $x_\pm \in \mathcal{K}_\pm$

$$[p(\mathrm{L}_0)x, x] = (p(D_0)x_0, x_0)_{\mathcal{H}} + (p(A_+)x_+, x_+)_+ - (p(A_-)x_-, x_-)_- \geq 0.$$

Somit ist L_0 definisierbar mit p als definisierendem Polynom. Das Spektrum von L_0 ist reell, und da $N(p) \subset \rho(\mathrm{L}_0)$ ist, hat L_0 keine kritischen Punkte, also ist L_0 stark stabil. Mit L_1 bezeichnen wir den folgenden Operator

$$\mathrm{L}_1 := \begin{bmatrix} D_0 & -\Gamma^+ \\ -\Gamma & A \end{bmatrix}.$$

L_1 erfüllt die Vorraussetzungen der Sätze 3.2 und 3.5. Aus dem Beweis von Satz 3.5 (2) folgt die Existenz eines $\eta \in \mathbb{R}$ mit $i\eta \in \rho(L_0) \cap \rho(L_1)$, so daß gilt

$$-T_0(i\eta)^{-1} := (D_0 - i\eta - \Gamma^+(A - i\eta)^{-1}\Gamma)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Somit läßt sich für L_1 die Formel (3.8) benutzen und es ergibt sich

$$(L_1 - i\eta)^{-1} - (L_0 - i\eta)^{-1} = \\ \begin{bmatrix} -T_0(i\eta)^{-1} - (D_0 - i\eta)^{-1} & -T_0(i\eta)^{-1}\Gamma^+(A - i\eta)^{-1} \\ -(A - i\eta)^{-1}\Gamma T_0(i\eta)^{-1} & -(A - i\eta)^{-1}\Gamma T_0(i\eta)^{-1}\Gamma^+(A - i\eta)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Nun sind $T_0(i\eta)^{-1}$ und $(D_0 - i\eta)^{-1}$ kompakte Operatoren, und deswegen ist auch $(L_1 - i\eta)^{-1} - (L_0 - i\eta)^{-1}$ kompakt. Nach Satz 1.24 gehört dann L_1 zur Klasse Π. Weiterhin gilt $D - D_0 = P(D - (\|A\| + 1)I)$, also ist $D - D_0$ ein endlichdimensionaler Operator und mit Korollar 1.25 folgt

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} D - D_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_0 & -\Gamma^+ \\ -\Gamma & A \end{bmatrix} \in \Pi.$$

□

Kapitel 4

Eine Sturm-Liouville-Gleichung, die rational vom Eigenwertparameter abhängt

4.1 Definition und Linearisierung

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y''(x) + \lambda y(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j(x)}{u_j(x) - \lambda}\, y(x) \;=\; g(x) \tag{4.1}$$

und die zugehörige homogene Gleichung

$$y''(x) + \lambda y(x) + \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j(x)}{u_j(x) - \lambda}\, y(x) \;=\; 0 \tag{4.2}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$ mit den Randbedingungen

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{4.3}$$

im Hilbertraum $\mathrm{L}_2(0, 1)$, wobei q_j, u_j, $j = 1, \dots, N$, reellwertige Funktionen aus $\mathrm{L}_\infty(0, 1)$ sind und $\lambda \in \mathbb{C}$ der Eigenwertparameter ist. Durch die Zuordnung $f \mapsto u_j f$ bzw. $f \mapsto q_j f$ für $f \in \mathrm{L}_2(0, 1)$ erzeugen die Funktionen u_j und q_j Multiplikationsoperatoren in $\mathrm{L}_2(0, 1)$. Diese beschränkten Operatoren wollen wir im folgenden ebenfalls mit u_j bzw. q_j bezeichnen.

Wir bezeichnen mit D den folgenden Operator in $\mathrm{L}_2(0, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(D) &:= \{f \in \mathrm{W}_2^2(0, 1) : f(0) = f(1) = 0\}, \\ Dy &:= -y'' \text{ für } y \in \mathcal{D}(D). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Insbesondere ist $(D-\lambda)^{-1}$ für $\lambda \in \rho(D)$ ein kompakter Operator. Der Multiplikationsoperator $Q(\lambda)$ sei definiert durch

$$Q(\lambda)y := \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{u_j - \lambda}\, y \quad \text{für } y \in \mathrm{L}_2(0,1).$$

D und Q erfüllen die Voraussetzungen von Abschnitt 3.1 und von Satz 3.5, insbesondere gelten also die Sätze 3.2 und 3.5. Nachdem wir noch eine weitere zusätzliche Voraussetzung eingeführt haben, fassen wir die Aussagen am Ende dieses Abschnittes zusammen.

Wir wollen voraussetzen, daß q_j und u_j noch die folgenden zusätzlichen Eigenschaften haben:

$$\begin{array}{ll} (1) & \textit{Für jedes } j = 1, \ldots, N, \ \textit{gilt } \operatorname{ess\,inf} q_j > 0 \ \textit{oder} \operatorname{ess\,sup} q_j < 0. \\ (2) & \{\bigcup\{\sigma(u_j) \,:\, \operatorname{ess\,inf} q_j > 0\}\} \cap \{\bigcup\{\sigma(u_j) \,:\, \operatorname{ess\,sup} q_j < 0\}\} = \emptyset. \end{array} \tag{4.5}$$

Die Linearisierung von (4.1) bzw. (4.2) läßt sich explizit angeben. Zunächst sortieren wir die Gleichung (4.1) entsprechend der Vorzeichen der q_j um. Wir benennen die q_j und u_j geeignet um, und Gleichung (4.1) wird zu

$$y''(x) + \lambda y(x) + \sum_{j=1}^{n_+} \frac{q_j^+(x)}{u_j^+(x) - \lambda}\, y(x) + \sum_{j=1}^{n_-} \frac{q_j^-(x)}{u_j^-(x) - \lambda}\, y(x) \quad = \quad g(x),$$

wobei $N = n_+ + n_-$ ist und in der ersten Summe (zweiten Summe) all die Summanden auftreten, für die $\operatorname{ess\,inf} q_j > 0$ (bzw. $\operatorname{ess\,sup} q_j < 0$) gilt. Wir definieren

$$\Delta_+ := \bigcup\{\sigma(u_j^+) : 1 \le j \le n_+\}, \quad \Delta_- := \bigcup\{\sigma(u_j^-) : 1 \le j \le n_-\}.$$

Dann gilt wegen (4.5) $\Delta_+ \cap \Delta_- = \emptyset$. Weiterhin setzen wir

$$\mathcal{K}_+ := (\mathrm{L}_2(0,1))^{n_+}, \ \mathcal{K}_- := (\mathrm{L}_2(0,1))^{n_-}, \ \mathcal{K} := \mathcal{K}_+ \times \mathcal{K}_-, \tag{4.6}$$

und wir definieren Operatoren $\Gamma_\pm \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(0,1), \mathcal{K}_\pm)$, $\Gamma \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(0,1), \mathcal{K})$, $A_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_\pm)$ und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ mittels

$$\begin{array}{lll} \Gamma_+ := \begin{bmatrix} (q_1^+)^{\frac12} \\ \vdots \\ (q_{n_+}^+)^{\frac12} \end{bmatrix}; & \Gamma_- := \begin{bmatrix} |q_1^-|^{\frac12} \\ \vdots \\ |q_{n_-}^-|^{\frac12} \end{bmatrix}; & \Gamma := \begin{bmatrix} \Gamma_+ \\ \Gamma_- \end{bmatrix}; \\ A_+ := \begin{bmatrix} u_1^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{n_+}^+ \end{bmatrix}; & A_- := \begin{bmatrix} u_1^- & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & u_{n_-}^- \end{bmatrix}; & A := \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix}. \end{array} \tag{4.7}$$

In $\mathcal{K}$ führen wir ein inneres Produkt ein

$$\left[\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{K}} := (f_1, g_1)_{\mathcal{K}_+} - (f_2, g_2)_{\mathcal{K}_-} \ \text{ für } f_1, g_1 \in \mathcal{K}_+, f_2, g_2 \in \mathcal{K}_-, \tag{4.8}$$

wobei $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{K}_+}$ (bzw. $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{K}_-}$) das übliche Hilbertraumskalarprodukt des Raumes $(\mathrm{L}_2(0,1))^{n_+}$ (bzw. $(\mathrm{L}_2(0,1))^{n_-}$) ist. Der Raum $(\mathcal{K},[\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}})$ ist ein Kreinraum. Mit $E(t,A_\pm)$ bezeichnen wir die Spektralschar des im Hilbertraum $\mathcal{K}_\pm$ selbstadjungierten Operators $A_\pm \in \mathcal{L}(\mathcal{K}_\pm)$. Dann gilt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_-\}$

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \Gamma^+(A-\lambda)^{-1}\Gamma = \Gamma_+^+(A_+-\lambda)^{-1}\Gamma_+ + \Gamma_-^+(A_- -\lambda)^{-1}\Gamma_- = \\ &= \Gamma_+^* \int \frac{1}{t-\lambda} d\,E(t,A_+)\Gamma_+ - \Gamma_-^* \int \frac{1}{t-\lambda} d\,E(t,A_-)\Gamma_-. \end{aligned}$$

Es gilt $\operatorname{supp} E(t,A_\pm) = \Delta_\pm = \sigma(A_\pm)$ und da nach Voraussetzung $\Delta_+ \cap \Delta_- = \emptyset$ gilt, ist nach Lemma 2.3 $Q(\lambda)$ gleichmäßig definisierbar (vgl. Definition 2.2). Es ist $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_-\}$. Mit T bezeichnen wir die Operatorfunktion

$$T(\lambda)y := -Dy + \lambda y + Q(\lambda)y \quad \text{für } y \in \mathcal{D}(D) \text{ und } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_-\}. \tag{4.9}$$

Nach Abschnitt 3.4 hat die Linearisierung $\mathbf{L}$ von T die Form

$$\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \mathcal{D}(D) \oplus \mathcal{K}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} D & -\Gamma^+ \\ -\Gamma & A \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Wir setzen $y_1 := -y$, $y_2 := -(A-\lambda)^{-1}\Gamma y$ und $\mathbf{y} = [y_1 \;\; y_2]^T$. Man erhält ein zu (4.1) äquivalentes Eigenwertproblem des linearen Operators $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}\mathbf{y} - \lambda\mathbf{y} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir fassen die Voraussetzungen und die sich daraus ergebenden Aussagen im folgenden Satz zusammen.

Satz 4.1 *Es seien* $q_j^\pm, u_j^\pm$, $j = 1,\ldots,n_\pm$, *reellwertige Funktionen aus* $\mathrm{L}_\infty(0,1)$ *mit* $\operatorname{ess\,inf} q_j^+ > 0$ *für* $1 \le j \le n_+$, $\operatorname{ess\,sup} q_j^- < 0$ *für* $1 \le j \le n_-$ *und* $\Delta_+ \cap \Delta_- = \emptyset$. *Es sei der Multiplikationsoperator* $Q(\lambda)$ *definiert durch*

$$Q(\lambda)y := \sum_{j=1}^{n_+} \frac{q_j^+}{u_j^+ - \lambda} y + \sum_{j=1}^{n_-} \frac{q_j^-}{u_j^- - \lambda} y \quad \textit{für } y \in \mathrm{L}_2(0,1) \textit{ und } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_-\}.$$

Ferner sei D *der in* (4.4) *definierte Differentialoperator, die Operatorfunktion* T *sei wie in* (4.9), *und* $\mathbf{L}$ *sei wie in* (4.10) *definiert. Dann gelten die Sätze* 3.2 *und* 3.5, *insbesondere gilt* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{L}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(A)$ *und* $\sigma(A) = \sigma(\mathbf{L}) \setminus \sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L})$. *Die Operatorfunktion* Q *ist gleichmäßig definisierbar, und* $\mathbf{L}$ *gehört zur Operatorenklasse* Π *(vgl. Satz* 3.7*).*

Die Aussage $\sigma(A) = \sigma(\mathbf{L}) \setminus \sigma_{\mathrm{p,norm}}(\mathbf{L})$ folgt aus der Tatsache, daß A ein Multiplikationsoperator ist, also $\sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \sigma(A)$ gilt.

4.2 Der Titchmarsh-Weyl-Koeffizient m und die Greensche Funktion

Wie in Abschnitt 4.1 betrachten wir die Operatorfunktion Q aus der Gleichung (4.1):

$$Q(x,\lambda) := \sum_{j=1}^{n_+} \frac{q_j^+(x)}{u_j^+(x)-\lambda} + \sum_{j=1}^{n_-} \frac{q_j^-(x)}{u_j^-(x)-\lambda} \quad \text{für } y \in \mathrm{L}_2(0,1),\ \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{\Delta_+ \cup \Delta_-\}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_-\}$ existiert ein $N(\lambda) < \infty$, so daß $|u_j^\pm(x) - \lambda|^{-1} \leq N(\lambda)$, $j = 1, \ldots, n_\pm$, fast überall auf $[0,1]$ gilt. Wir betrachten die Integralgleichungen

$$\begin{aligned}
\alpha(x,\lambda) &= 1 - \int_0^x (\lambda + Q(x,\lambda))\alpha(x,\lambda)(x-\xi)d\xi, \\
\beta(x,\lambda) &= x - \int_0^x (\lambda + Q(x,\lambda))\beta(x,\lambda)(x-\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Diese definieren Funktionen $\alpha(\cdot,\lambda)$, $\beta(\cdot,\lambda)$ mit absolut stetigen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\alpha'(x,\lambda) &= -\int_0^x (\lambda + Q(x,\lambda))\alpha(x,\lambda)d\xi, \\
\beta'(x,\lambda) &= 1 - \int_0^x (\lambda + Q(x,\lambda))\beta(x,\lambda)d\xi.
\end{aligned}$$

Ferner sind $\alpha(\cdot,\lambda)$, $\beta(\cdot,\lambda)$ Lösungen der Gleichung (4.2) und es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha(0,\lambda) &= 1, \qquad \alpha'(0,\lambda) = 0, \\
\beta(0,\lambda) &= 0, \qquad \beta'(0,\lambda) = 1.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Weiterhin sind die Funktionen $\alpha(x,\cdot)$, $\beta(x,\cdot)$, $\alpha'(x,\cdot)$, $\beta'(x,\cdot)$ für festes $x \in [0,1]$ holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{\Delta_+ \cup \Delta_-\}$, und für die Wronskideterminante $W(\alpha,\beta) = \alpha'\beta - \alpha\beta'$ gilt $W(\alpha,\beta) = 1$. Die Funktion

$$m(\lambda) := -\frac{\alpha(1,\lambda)}{\beta(1,\lambda)} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_-\}. \tag{4.12}$$

heißt Titchmarsh-Weyl-Koeffizient. Der Titchmarsh-Weyl-Koeffizient m ist meromorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_-\}$, und die Funktion $\chi(\cdot,\lambda) = \alpha(\cdot,\lambda) + m(\lambda)\beta(\cdot,\lambda)$ ist eine Lösung der Gleichung (4.2) mit der Eigenschaft $\chi(1,\lambda) = 0$, das heißt χ erfüllt die Randbedingung in $x = 1$. Den folgenden Satz beweist man wie im klassischen Sturm-Liouville-Fall.

Satz 4.2 *Die Eigenwerte der Operatorfunktion $T = -D + \lambda + Q(\lambda)$ in $\mathbb{C}\setminus\{\Delta_+ \cup \Delta_-\}$ sind die Pole des Titchmarsh-Weyl-Koeffizienten m in $\mathbb{C}\setminus\{\Delta_+ \cup \Delta_-\}$. Es sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_- \cup \sigma_\mathrm{p}(\mathrm{T})\}$, so ist $T(\lambda)^{-1}$ gegeben durch*

$$(T(\lambda)^{-1}f)(x) = -\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi \quad \textit{für } x \in [0,1],$$

wobei

$$G(x,\xi,\lambda) := \begin{cases} \beta(x,\lambda)\chi(\xi,\lambda) & x \leq \xi, \\ \beta(\xi,\lambda)\chi(x,\lambda) & x \geq \xi. \end{cases}$$

4.3 Gelfandtripel von L

Die Bezeichnungen und Voraussetzungen von Abschnitt 4.1 mögen gelten. Mit δ_0' bezeichnen wir das lineare Funktional, welches definiert ist auf allen komplexen Funktionen v auf $[0,1]$, die eine (rechtseitige) Ableitung $v'(0)$ bei Null besitzen: $\delta_0'(v) := v'(0)$. Es sei $\mathbf{d}_0' := (\delta_0', 0)^{\mathrm{T}}$.

Wir betrachten nun wieder den Operator $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}$ wie in (4.10) definiert, wobei D wie in (4.4) gewählt wird. Dazu wird $\mathcal{H} := L_2(0,1) \oplus \mathcal{K}$ versehen mit folgendem positiv definiten Skalarprodukt

$$\left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} := (f,f)_{L_2} + (g,g)_{\mathcal{K}} \text{ für } \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \in L_2(0,1) \oplus \mathcal{K}, \tag{4.13}$$

wobei $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{K}}$ ein fest gewähltes Hilbertraumskalarprodukt im Kreinraum $\mathcal{K}$ ist, das die Topologie von $\mathcal{K}$ erzeugt. Wir bezeichnen dann mit $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-$, $\mathcal{H}_+^{(*)} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-^{(*)}$ die durch $\mathbf{L}$ erzeugten Gelfandtripel von $\mathcal{H}$ (vgl. Abschnitt 1.9).

Lemma 4.3 *Es sei D wie in* (4.4) *und* $\mathbf{L}$ *wie in* (4.10) *definiert. Dann gilt* $\mathbf{d}_0' \in \mathcal{H}_-$.

Beweis. Wir betrachten den folgenden Operator $\tilde{L}$ in $\mathcal{H} = L_2(0,1) \oplus \mathcal{K}$ mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(D) \oplus \mathcal{K}$:

$$\tilde{L} := \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Dann gilt $\mathcal{D}(\tilde{L}) = \mathcal{D}(\mathbf{L})$. Nach Lemma 1.29 erzeugen $\tilde{L}$ und $\mathbf{L}$ äquivalente Gelfandtripel. Wir unterscheiden daher die von $\tilde{L}$ erzeugten Gelfandtripel nicht von denen durch $\mathbf{L}$ erzeugten Tripel und nennen sie wieder $\mathcal{H}_+ \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-$ und $\mathcal{H}_+^{(*)} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_-^{(*)}$. Nun ist $\mathcal{D}(\tilde{L}) \subset \mathrm{W}_2^2(0,1) \oplus \mathcal{K}$, und nach Satz 1.28 existiert eine Konstante $M_2 \in \mathbb{R}$ mit $\|f\|_{\mathcal{C}^1([0,1])} \le M_2 \|f\|_{\mathrm{W}_2^2(0,1)}$ für alle $f \in \mathcal{D}(D)$, woraus für $\binom{f}{g} \in \mathcal{D}(\tilde{L}) = \mathcal{H}_+^{(*)}$ folgt

$$\left| \mathbf{d}_0' \left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right) \right|^2 \le \|f\|^2_{\mathcal{C}^1([0,1])} \le M_2 \|f\|^2_{\mathrm{W}_2^2(0,1)} \le M_2 (\|f\|^2_{L_2} + \|f''\|^2_{L_2} + 2\|g\|^2_{\mathcal{K}}) =$$

$$= M_2 \left(\left(\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} + \left(\tilde{L} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \tilde{L} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \right) = M_2 \left\| \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right\|_+^{(*)2}.$$

Also ist $\mathbf{d}_0' \in (\mathcal{H}_+^{(*)})'$, und daher gilt $\mathbf{d}_0' \in \mathcal{H}_-^{(*)}$. Weiterhin gilt nach Lemma 1.30 $J\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \mathcal{D}(\mathbf{L}^*)$, und da J eine Bijektion ist, gilt somit $\mathcal{D}(\mathbf{L}) = \mathcal{D}(\mathbf{L}^*)$. Nach Lemma 1.29 sind die von $\mathbf{L}$ und $\mathbf{L}^*$ erzeugten Gelfandtripel äquivalent, also ist $\mathbf{d}_0' \in \mathcal{H}_-$. □

4.4 Der Titchmarsh-Weyl-Koeffizient m ist eine definisierbare Funktion

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß der Titchmarsh-Weyl-Koeffizient m eine definisierbare Funktion ist (vgl. Definition 2.1). Dazu beweisen wir zuerst einige Hilfsaussagen.

Hierzu sei D wie in (4.4), und wir setzen voraus, daß all die Annahmen an u_j und q_j aus Abschnitt 4.1 gelten mögen. $\mathcal{K}$ sei wie in (4.8) gewählt. Dann ist $\mathbf{L}$ definiert auf $\mathcal{D}(D) \oplus \mathcal{K}$ und hat die Gestalt (4.10). Wie in Abschnitt 4.3 sei $\mathcal{H} = \mathrm{L}_2(0,1) \oplus \mathcal{K}$, und wir versehen $\mathcal{H}$ mit dem indefiniten Skalarprodukt $\left[\binom{f_1}{f_2}, \binom{g_1}{g_2}\right]_{\mathcal{H}} := (f_1, g_1)_{\mathrm{L}_2} + [f_2, g_2]_{\mathcal{K}}$ für $f_1, g_1 \in \mathrm{L}_2(0,1)$, $f_2, g_2 \in \mathcal{K}$, wobei $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{K}}$ wie in (4.8) ist. Weiterhin kann man auf $\mathcal{H}$ ein Hilbertraumskalarprodukt $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ wie in (4.13) einführen.

Nach Lemma 4.3 ist $\mathbf{d}_0' \in \mathcal{H}_-$, und $(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}$, $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$, läßt sich auf $\mathcal{H}_-$ erweitern. Diese Erweiterung wollen wir wieder mit $(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}$ bezeichnen.

Lemma 4.4 *Für* $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$ *gilt* $(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0' = \begin{bmatrix} \chi(\cdot,\lambda) \\ (A-\lambda)^{-1}\Gamma\,\chi(\cdot,\lambda) \end{bmatrix}$.

Beweis. Es sei $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$. Dann folgt aus der Reellwertigkeit der Funktionen $q_j^{\pm}$ und $u_j^{\pm}$, $j = 1, \ldots, n_{\pm}$, und aus dem Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen 2. Ordnung, daß $\chi(\cdot,\overline{\lambda}) = \overline{\chi(\cdot,\lambda)}$ und $m(\overline{\lambda}) = \overline{m(\lambda)}$ gilt. Es sei ferner $f \in \mathrm{L}_2(0,1)$ und $g \in \mathcal{K}$, dann gilt wegen (3.8)

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, (\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \left[(\mathbf{L}-\overline{\lambda})^{-1}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \\
= \; &\left[\begin{pmatrix} -T(\overline{\lambda})^{-1}f - T(\overline{\lambda})^{-1}\Gamma^+(A-\overline{\lambda})^{-1}g \\ -(A-\overline{\lambda})^{-1}\Gamma T(\overline{\lambda})^{-1}f + (A-\overline{\lambda})^{-1}(I - \Gamma T(\overline{\lambda})^{-1}\Gamma^+(A-\overline{\lambda})^{-1})g \end{pmatrix}, \mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Definition von $\mathbf{d}_0'$ (siehe Seite 40) und Satz 4.2

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, (\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \left(-T(\overline{\lambda})^{-1}(f + \Gamma^+(A-\overline{\lambda})^{-1}g), \delta_0'\right)_{\mathrm{L}_2} = \\
= \; &\left(\int_0^1 G(\cdot,\xi,\overline{\lambda})(f(\xi) + (\Gamma^+(A-\overline{\lambda})^{-1}g)(\xi))d\xi, \delta_0'\right)_{\mathrm{L}_2} = \\
= \; &\beta'(0,\overline{\lambda}) \int_0^1 \chi(\xi,\overline{\lambda})(f(\xi) + (\Gamma^+(A-\overline{\lambda})^{-1}g)(\xi))d\xi = \\
= \; &\left(f + \Gamma^+(A-\overline{\lambda})^{-1}g, \overline{\chi(\cdot,\overline{\lambda})}\right)_{\mathrm{L}_2} = \\
= \; &(f, \chi(\cdot,\lambda))_{\mathrm{L}_2} + \left[g, (A-\lambda)^{-1}\Gamma\chi(\cdot,\lambda)\right]_{\mathcal{K}} = \left[\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi(\cdot,\lambda) \\ (A-\lambda)^{-1}\Gamma\chi(\cdot,\lambda) \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.5 *Für $\lambda, z \in \rho(\mathbf{L})$ gilt*

$$\left[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0', (\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} \quad = \quad \frac{m(\lambda)-\overline{m(z)}}{\lambda-\overline{z}}.$$

Beweis. Es seien $\lambda, z \in \rho(\mathbf{L})$. Dann gilt wegen Lemma 4.4

$$\begin{aligned}
&\left[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0', (\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \\
= \quad & \left[\begin{pmatrix} \chi(\cdot,\lambda) \\ (A-\lambda)^{-1}\Gamma\chi(\cdot,\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi(\cdot,z) \\ (A-z)^{-1}\Gamma\chi(\cdot,z) \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H}} = \\
= \quad & (\chi(\cdot,\lambda),\chi(\cdot,z))_{\mathrm{L}_2} + \Big(\Gamma^+(A-\lambda)^{-1}(A-\overline{z})^{-1}\Gamma\chi(\cdot,\lambda),\chi(\cdot,z)\Big)_{\mathrm{L}_2} = \\
= \quad & (\chi(\cdot,\lambda),\chi(\cdot,z))_{\mathrm{L}_2} + \frac{1}{\lambda-\overline{z}}\int_0^1 \Gamma^+((A-\lambda)^{-1}-(A-\overline{z})^{-1})\Gamma\chi(\xi,\lambda)\overline{\chi(\xi,z)}d\xi = \\
= \quad & \frac{1}{\lambda-\overline{z}}\left\{\int_0^1(\lambda-\overline{z})\chi(\xi,\lambda)\overline{\chi(\xi,z)}d\xi + \int_0^1(Q(\lambda)-Q(\overline{z}))\chi(\xi,\lambda)\overline{\chi(\xi,z)}d\xi\right\},
\end{aligned}$$

und da χ die homogene Gleichung (4.2) erfüllt, folgt

$$\begin{aligned}
&\left[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0', (\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \\
= \quad & \frac{1}{\lambda-\overline{z}}\left\{\int_0^1(-\chi''(\xi,\lambda)-Q(\lambda)\chi(\xi,\lambda))\overline{\chi(\xi,z)}d\xi + \right. \\
+ \quad & \left.\int_0^1(\overline{\chi''(\xi,z)}+Q(\overline{z})\overline{\chi(\xi,z)})\chi(\xi,\lambda)d\xi + \int_0^1(Q(\lambda)-Q(\overline{z}))\chi(\xi,\lambda)\overline{\chi(\xi,z)}d\xi\right\} = \\
= \quad & \frac{1}{\lambda-\overline{z}}\left\{-\int_0^1\chi''(\xi,\lambda)\overline{\chi(\xi,z)}d\xi + \int_0^1\overline{\chi''(\xi,z)}\chi(\xi,\lambda)d\xi\right\} = \\
= \quad & \frac{1}{\lambda-\overline{z}}\left\{\chi'(0,\lambda)\overline{\chi(0,z)}-\chi'(1,\lambda)\overline{\chi(1,z)}+\int_0^1\chi'(\xi,\lambda)\overline{\chi'(\xi,z)}d\xi + \right. \\
& \qquad \left. + \overline{\chi'(1,z)}\chi(1,\lambda)-\overline{\chi'(0,z)}\chi(0,\lambda)-\int_0^1\overline{\chi'(\xi,z)}\chi'(\xi,\lambda)d\xi\right\} = \\
= \quad & \frac{m(\lambda)-\overline{m(z)}}{\lambda-\overline{z}}.
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.6 *Für $\lambda, z \in \rho(\mathbf{L})$ gilt*

$$\begin{aligned}
&\left[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}(\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0', (\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \\
= \quad & \frac{m(\lambda)}{(\lambda-z)(\lambda-\overline{z})} - \frac{m(z)}{(\lambda-z)(z-\overline{z})} + \frac{\overline{m(z)}}{(\lambda-\overline{z})(z-\overline{z})}.
\end{aligned}$$

Beweis. Es seien $\lambda, z \in \rho(\mathbf{L})$. Dann gilt wegen Lemma 4.5

$$\begin{aligned}
&\left[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}(\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0', (\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \\
= \;& \frac{1}{\lambda - z}\left\{\left[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0', (\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} - \left[(\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0', (\mathbf{L}-z)^{-1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}}\right\} = \\
= \;& \frac{1}{\lambda - z}\left\{\frac{m(\lambda)-\overline{m(z)}}{\lambda - \overline{z}} - \frac{m(z)-\overline{m(z)}}{z-\overline{z}}\right\} = \\
= \;& \frac{m(\lambda)}{(\lambda-z)(\lambda-\overline{z})} - \frac{m(z)}{(\lambda-z)(z-\overline{z})} + \frac{\overline{m(z)}}{(\lambda-\overline{z})(z-\overline{z})}.
\end{aligned}$$

□

Satz 4.7 *Unter den Voraussetzungen von Satz* 4.1 *ist der Titchmarsh-Weyl-Koeffizient* m *(vgl.* 4.12*) eine definisierbare Funktion im Sinne der Definition* 2.1.

Beweis. Nach Abschnitt 4.2 ist m meromorph in $\mathbb{C} \setminus \{\Delta_+ \cup \Delta_-\}$ und da nach Voraussetzung $\{i, -i\} \in \rho(\mathbf{L})$ gilt, ist wegen Satz 4.2 und Satz 3.2 m holomorph in i und $-i$. Ferner folgt aus der Reellwertigkeit der Koeffizienten q_j, u_j und dem Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung, daß $\overline{m(\lambda)} = m(\overline{\lambda})$ gilt. Also ist $m \in M_i(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \mathbb{C})$. Es sei p ein definisierendes Polynom von $\mathbf{L}$ mit reellen Koeffizienten, d.h. es gilt $\overline{p(\lambda)} = p(\overline{\lambda})$. Es sei $n :=$deg(p). Wir setzen $r(\lambda) := p(\lambda)(\lambda - i)^{-n-1}(\lambda+i)^{-n-1}$, und für $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$ sei $\mathbf{R}_\lambda := (\mathbf{L}-\lambda)^{-1}$. Dann ist $r \in \mathcal{R}^s_{i,-i}$ und wegen Lemma 4.6 gilt

$$\begin{aligned}
\frac{p(\lambda)m(\lambda)}{(\lambda-i)^{n+1}(\lambda+i)^{n+1}} &= \frac{p(\lambda)}{(\lambda-i)^n(\lambda+i)^n}\left\{\left[\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_i\mathbf{d}_0', \mathbf{R}_i\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} + \right. \\
&+ \left. \frac{m(i)}{2i(\lambda-i)} - \frac{\overline{m(i)}}{2i(\lambda+i)}\right\} = N(\lambda) + n(\lambda),
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
N(\lambda) &:= \left[p(\mathbf{L})\mathbf{R}_{-i}^n\mathbf{R}_i^n\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_i\mathbf{d}_0', \mathbf{R}_i\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} \quad \text{und} \\
n(\lambda) &:= \left[\left(\frac{p(\lambda)}{(\lambda-i)^n(\lambda+i)^n} - p(\mathbf{L})\mathbf{R}_{-i}^n\mathbf{R}_i^n\right)\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_i\mathbf{d}_0', \mathbf{R}_i\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} + \\
&+ \frac{p(\lambda)}{2i(\lambda-i)^n(\lambda+i)^n}\left(\frac{m(i)}{\lambda-i} - \frac{\overline{m(i)}}{\lambda+i}\right).
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß N eine Nevanlinna-Funktion und $n \in \mathcal{R}^s_{i,-i}$ ist. Aus Satz 1.14 folgt, daß N holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist. Aus [DS, VII 9.8] folgt $\mathbf{R}_i^n p(\mathbf{L})x = p(\mathbf{L})\mathbf{R}_i^n x$ für $x \in \mathcal{D}(\mathbf{L}^n)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\overline{N(\lambda)} &= \left[\mathbf{R}_i\mathbf{d}_0', p(\mathbf{L})\mathbf{R}_{-i}^n\mathbf{R}_i^n\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_i\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \left[\mathbf{R}_i^{n+1}\mathbf{d}_0', p(\mathbf{L})\mathbf{R}_i^n\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_i\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \\
&= \left[\mathbf{R}_{\overline{\lambda}}\mathbf{R}_{-i}^n p(\mathbf{L})\mathbf{R}_i^{n+1}\mathbf{d}_0', \mathbf{R}_i\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = N(\overline{\lambda}).
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt für λ mit $\operatorname{Im}\lambda > 0$ und da p ein definisierendes Polynom von $\mathbf{L}$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} N(\lambda) &= \frac{1}{2i}\left[p(\mathbf{L})\mathbf{R}_{-i}^{n}\mathbf{R}_{i}^{n}(\mathbf{R}_\lambda - \mathbf{R}_{\overline{\lambda}})\mathbf{R}_i\mathbf{d}_0',\, \mathbf{R}_i\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} = \\ &= \operatorname{Im}\lambda\left[p(\mathbf{L})\mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_i^{n+1}\mathbf{d}_0',\, \mathbf{R}_\lambda\mathbf{R}_i^{n+1}\mathbf{d}_0'\right]_{\mathcal{H}} \geq 0.\end{aligned}$$

Also ist N eine Nevanlinna-Funktion. Mit analogen Argumenten läßt sich leicht zeigen, daß $n(\overline{\lambda}) = \overline{n(\lambda)}$ gilt. Mit [Lan, S. 25-26] folgt, daß n eine rationale Funktion ist, die nur Polstellen in $\{i, -i\}$ hat. □

4.5 Ein Isomorphismus

Mit den Bezeichnungen und unter den Voraussetzungen des vorigen Abschnittes, wollen wir in diesem Abschnitt einen Kreinraum bestimmen, so daß die Cayleytransformierte von $\mathbf{L}$ unitär äquivalent zu dem Operator der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen in diesem Kreinraum ist. Mit μ bezeichnen wir im folgenden das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Wir setzen

$$\Omega_j^{\pm}(\lambda) := \left\{\xi \in [0,1] : u_j^{\pm}(\xi) = \lambda\right\} \quad \text{für } \; j = 1, \ldots, n_{\pm}.$$

Das folgende Lemma ist eine Verallgemeinerung von [LMM, Lemma 1.3].

Lemma 4.8 *Es sei $\lambda \in \Delta_+$, und für jedes j, $1 \leq j \leq n_+$, sei λ entweder aus der Resolventenmenge von u_j^+ oder ein isolierter Eigenwert von u_j^+.*

(1) *Es gelte $\mu(\Omega_k^+(\lambda) \cap \Omega_l^+(\lambda)) = 0$ für alle $1 \leq k < l \leq n_+$. Dann ist $\lambda \notin \sigma_p(\mathbf{L})$.*

(2) *Es existieren k, l, $1 \leq k < l \leq n_+$, so daß $\mu(\Omega_k^+(\lambda) \cap \Omega_l^+(\lambda)) > 0$ gilt. Dann ist $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{L})$, und λ hat unendliche geometrische Vielfachheit. Jeder Eigenvektor h von $\mathbf{L}$ zu λ hat die Gestalt*

$$h = \left(0, h_1^+, \ldots, h_{n_+}^+, 0, \ldots, 0\right) \quad \textit{mit } \; h_j^+ \in \mathrm{L}_2(0,1),\ 1 \leq j \leq n_+, \tag{4.14}$$

und somit gilt $[h, h]_{\mathcal{H}} > 0$.

Beweis. Wir setzen

$$\Gamma_\lambda := \bigcup_{j=1}^{n_+} \Omega_j^+(\lambda).$$

Da $\lambda \in \Delta_+$ ist, muß λ ein isolierter Eigenwert mindestens eines $u_{j_0}^+$, $1 \leq j_0 \leq n_+$, sein. Also ist $\mu(\Gamma_\lambda) > 0$. Es sei V die Menge aller $\xi \in (0,1)$, für die ein $\epsilon_\xi > 0$ existiert, so daß

$$\mu(\Gamma_\lambda \cap (\xi - \epsilon_\xi, \xi + \epsilon_\xi)) = 0 \;\text{ ist.}$$

Aus dem Satz von Lindelöf [DS, I 4.14] folgt, daß $\mu(\Gamma_\lambda \cap V) = 0$ ist. Man kann durch Ändern der Werte der u_j^+, $j = 1, \ldots, n_+$, auf der Nullmenge $\Gamma_\lambda \cap V$ ohne

Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\Gamma_\lambda \cap V = \emptyset$ ist. Es gilt dann insbesondere

$$\mu(\Gamma_\lambda \cap (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)) > 0$$

für alle $\xi \in \Gamma_\lambda$ und $\epsilon > 0$.
Nun nehmen wir an, es existiere ein Element h, $h \neq 0$, $h = \binom{f}{g} \in \mathcal{D}(\mathbf{L}) \oplus \mathcal{K}$, $g = \left(g_1^+, \ldots, g_{n_+}^+, g_1^-, \ldots, g_{n_-}^-\right)^{\mathrm{T}}$ mit $(\mathbf{L} - \lambda)h = 0$, also gilt

$$(D - \lambda)f - \Gamma^+ g = 0, \quad -\Gamma f + (A - \lambda)g = 0.$$

Mit (4.7) erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$(D-\lambda)f - \sum_{j=1}^{n_+}(q_j^+)^{\frac{1}{2}} g_j^+ + \sum_{j=1}^{n_-}|q_j^-|^{\frac{1}{2}} g_j^- \quad = \quad 0 \tag{4.15}$$

$$-\begin{bmatrix} (q_1^+)^{\frac{1}{2}} f \\ \vdots \\ (q_{n_+}^+)^{\frac{1}{2}} f \\ |q_1^-|^{\frac{1}{2}} f \\ \vdots \\ |q_{n_-}^-|^{\frac{1}{2}} f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (u_1^+ - \lambda) g_1^+ \\ \vdots \\ (u_{n_+}^+ - \lambda) g_{n_+}^+ \\ (u_1^- - \lambda) g_1^- \\ \vdots \\ (u_{n_-}^- - \lambda) g_{n_-}^- \end{bmatrix} \quad = \quad 0. \tag{4.16}$$

Die j-te Zeile von (4.16) ergibt $f(\xi) = 0$ fast überall auf $\Omega_j^+(\lambda)$, $j = 1, \ldots, n_+$, also ist $f(\xi) = 0$ fast überall auf Γ_λ. Für jedes $\xi_0 \in \Gamma_\lambda$ und jedes $\epsilon > 0$ existieren unendlich viele Punkte ξ in $\Gamma_\lambda \cap (\xi_0 - \epsilon, \xi_0 + \epsilon)$, so daß $f(\xi) = 0$ ist. Daher gilt $f(\xi_0) = 0$ und $f'(\xi_0) = 0$, da f differenzierbar ist. Wegen der Stetigkeit von f und f' gilt ferner $f(\xi) = 0$ und $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \overline{\Gamma_\lambda}$.
Als nächstes zeigen wir, daß $f \equiv 0$ auf $[0, 1]$ ist. Ist $\overline{\Gamma_\lambda} = [0, 1]$, so gilt dies bereits. Ist hingegen $\overline{\Gamma_\lambda} \neq [0, 1]$, so wählen wir eine Zusammenhangskomponente I_1 von $(0, 1) \setminus \overline{\Gamma_\lambda}$. Da $\Gamma_\lambda \neq \emptyset$ ist, gehört mindestens ein Randpunkt ξ_1 von I_1 zu $\overline{\Gamma_\lambda}$. Dann gilt $f(\xi_1) = f'(\xi_1) = 0$. Auf I_1 erfüllt die Funktion f die Differentialgleichung

$$f'' + \lambda f + \left(\sum_{j=1}^{n_+} \frac{q_j^+}{u_j^+ - \lambda} + \sum_{j=1}^{n_-} \frac{q_j^-}{u_j^- - \lambda} \right) f = 0,$$

und die Koeffizienten sind auf I_1 wesentlich beschränkt. Nach dem Eindeutigkeitssatz folgt somit $f \equiv 0$ auf I_1 und damit auch auf ganz $[0, 1]$. Da $\lambda \in \Delta_+$ ist, folgt aus den Vorrausetzungen (4.5) an die q_j und u_j, daß $\lambda \in \rho(u_j^-)$, $j = 1, \ldots, n_-$, ist. Daher folgt aus (4.16) $g_j^- = 0$ für $j = 1, \ldots, n_-$. Damit haben wir gezeigt, daß ein Eigenvektor h von $\mathbf{L}$ in λ die Gestalt (4.14) haben muß, insbesondere gilt dann $[h, h]_{\mathcal{H}} > 0$. Ebenfalls folgt aus (4.16), daß $g_j^+ = 0$ fast überall auf $[0, 1] \setminus \Omega_j^+(\lambda)$ für $1 \leq j \leq n_+$ gilt. Unter den Voraussetzungen von (1) ist $\mu(\Omega_k^+(\lambda) \cap \Omega_l^+(\lambda)) = 0$ für alle $k \neq l$ mit $1 \leq k, l \leq n_+$. Mit Gleichung (4.15) folgt daher $g_j^+ = 0$ fast

überall auf $[0,1]$, im Widerspruch zur Annahme $h \neq 0$. Damit ist (1) vollständig bewiesen.
Es bleibt noch zu zeigen, daß, unter den Voraussetzungen von (2), λ ein Eigenwert unendlicher geometrischer Vielfachheit von $\mathbf{L}$ ist. Dazu sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mu(\Omega_1^+(\lambda) \cap \Omega_2^+(\lambda)) > 0$. Wir wählen eine beliebige Funktion $h \in \mathrm{L}_2(0,1)$, $h \neq 0$, die außerhalb von $\mu(\Omega_1^+(\lambda) \cap \Omega_2^+(\lambda))$ verschwindet. Dann ist $\left(0, (q_1^+)^{-\frac{1}{2}} h, -(q_2^+)^{-\frac{1}{2}} h, 0, \cdots, 0\right) \in \mathcal{D}(\mathbf{L}) \oplus \mathcal{K}$ und ein Eigenvektor von $\mathbf{L}$ in λ. Da h beliebig gewählt war, hat $\mathbf{L}$ unendliche geometrische Vielfachheit in λ. $\square$

Ein analoges Lemma gilt für $\lambda \in \Delta_-$:

Lemma 4.9 *Es sei $\lambda \in \Delta_-$, und für jedes j, $1 \leq j \leq n_-$, sei λ entweder aus der Resolventenmenge von u_j^- oder ein isolierter Eigenwert von u_j^-.*

(1) *Es gelte $\mu(\Omega_k^-(\lambda) \cap \Omega_l^-(\lambda)) = 0$ für alle $1 \leq k < l \leq n_-$. Dann ist $\lambda \notin \sigma_p(\mathbf{L})$.*

(2) *Es existieren k, l, $1 \leq k < l \leq n_-$, so daß $\mu(\Omega_k^-(\lambda) \cap \Omega_l^-(\lambda)) > 0$ gilt. Dann ist $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{L})$, und λ hat unendliche geometrische Vielfachheit. Jeder Eigenvektor h von $\mathbf{L}$ zu λ hat die Gestalt*

$$h = \left(0, 0, \ldots, 0, h_1^-, \ldots, h_{n_-}^-\right) \quad \textit{mit } h_j^- \in \mathrm{L}_2(0,1),\ 1 \leq j \leq n_-, \tag{4.17}$$

und somit gilt $[h,h]_{\mathcal{H}} < 0$.

Wir setzen nun für den Rest der Arbeit zusätzlich voraus, daß die Funktionen $u_j^\pm$, $j = 1, \ldots, n_\pm$, Elementarfunktionen sind, das heißt, zu jedem $u_j^\pm$ existieren endlich viele paarweise disjunkte meßbare Mengen $\omega_{k,j}^\pm$, $1 \leq k \leq n_j^\pm$, deren Maß positiv ist, mit

$$[0,1] \;=\; \bigcup_{k=1}^{n_j^\pm} \omega_{k,j}^\pm \quad \text{für jedes } j = 1, \ldots, n_\pm,$$

so daß zu jedem $\omega_{k,j}^\pm$ ein $\lambda_{k,j}^\pm \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$u_j^\pm\Big|_{\omega_{k,j}^\pm} \;=\; \lambda_{k,j}^\pm \quad \text{fast überall auf } \omega_{k,j}^\pm.$$

Insbesondere ist dann $\Delta_+ = \{\lambda_{k,j}^+ : 1 \leq j \leq n_+, 1 \leq k \leq n_j^+\}$ und $\Delta_- = \{\lambda_{k,j}^- : 1 \leq j \leq n_-, 1 \leq k \leq n_j^-\}$. In diesem Falle sind die Voraussetzungen von Lemma 4.8 und Lemma 4.9 für jedes $\lambda \in \Delta_+ \cup \Delta_-$ erfüllt. Es gilt die folgende Aussage über kritische Punkte des Operators $\mathbf{L}$.

Lemma 4.10 *Die $u_j^\pm$, $j = 1, \ldots, n_\pm$, seien Elementarfunktionen. Dann ist $(\Delta_+ \cup \Delta_-) \cap c(\mathbf{L}) = \emptyset$.*

Beweis. Da $\mathbf{L}$ definisierbar ist, gilt wegen [JL1, Satz 1] $c(\mathbf{L}) \setminus \sigma_p(\mathbf{L}) \subset c_\infty(\mathbf{L})$. Da nach Satz 3.7 $\mathbf{L} \in \Pi$ ist, also $c_\infty(\mathbf{L}) = \emptyset$ gilt, ist $\infty \notin c(\mathbf{L})$. Wir nehmen an, es existiere ein $\lambda \in \Delta_+ \cap c(\mathbf{L})$. Für dieses λ gelten die Aussagen von Lemma 4.8 . Da $c(\mathbf{L}) \subset \sigma_p(\mathbf{L})$ ist, muß $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{L})$ gelten, Fall (1) von Lemma 4.8 kann also nicht auftreten. Da $c_\infty(\mathbf{L}) = \emptyset$ ist, existiert eine offene Menge $\Delta \in \mathcal{R}_{\mathrm{L}}$, $\Delta \cap c(\mathbf{L}) = \{\lambda\}$, mit $\kappa_-(\lambda, \mathbf{L}) = \kappa_-(E(\Delta)\mathcal{H}) < \infty$ (siehe Abschnitt 1.7). Also ist $E(\Delta)\mathcal{H}$ ein Pontrjaginraum. Aus [Bog, IX Theorem 7.2] folgt die Existenz eines nichtpositiven Eigenvektors zu einem Eigenwert $\lambda_0 \in \Delta$. Nach Lemma 4.8(2) sind aber alle Eigenvektoren zum Eigenwert λ positiv, daher folgt $\lambda_0 \neq \lambda$ und

$$\kappa_-(\lambda, \mathbf{L}) < \kappa_-(\lambda_0, \mathbf{L}) + \kappa_-(\lambda, \mathbf{L}) \leq \kappa_-(E(\Delta)\mathcal{H}, \mathbf{L}) = \kappa_-(\lambda, \mathbf{L}),$$

d.h. wir erhalten einen Widerspruch, also gilt $\Delta_+ \cap c(\mathbf{L}) = \emptyset$. Mit einer analogen Argumentation erhält man $\Delta_- \cap c(\mathbf{L}) = \emptyset$. □

Aus Lemma 4.10 folgt, daß $\mathbf{L}$ nur reguläre kritische Punkte besitzt.

Satz 4.11 *Die $u_j^\pm$, $j = 1, \ldots, n_\pm$, seien Elementarfunktionen. Dann bilden die Eigenvektoren und assoziierten Vektoren von $\mathbf{L}$ eine Rieszbasis von $\mathcal{H}$.*

Beweis. Da nach Lemma 4.10 $(\Delta_+ \cup \Delta_-) \cap c(\mathbf{L}) = \emptyset$ gilt, existiert zu jedem $\lambda \in \Delta_+ \cup \Delta_-$ eine offene Menge $\Delta_\lambda \in \mathcal{R}_{\mathrm{L}}$, $\Delta_\lambda \cap c(\mathbf{L}) = \emptyset$, $\lambda \in \Delta_\lambda$, so daß $(E(\Delta_\lambda)\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_\mathcal{H})$ oder $(E(\Delta_\lambda)\mathcal{H}, -[\cdot,\cdot]_\mathcal{H})$ ein Hilbertraum ist. Man kann die Δ_λ so wählen, daß $\Delta_{\lambda_1} \cap \Delta_{\lambda_2} = \emptyset$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \Delta_+ \cup \Delta_-$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt. Aus dem Beweis von Lemma 4.10 folgt, daß $\infty \notin c(\mathbf{L})$ ist. Weiterhin folgt aus dem Beweis von Satz 3.7 die Existenz einer offenen Umgebung $\Delta_\infty \in \mathcal{R}_{\mathrm{L}}$ von ∞, so daß $E(\Delta_\infty)\mathcal{H}$ ein positiver Teilraum von $\mathcal{H}$ ist, insbesondere ist also $(E(\Delta_\infty)\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_\mathcal{H})$ ein Hilbertraum. Man kann Δ_∞ so wählen, daß $\Delta_\infty \cap \Delta_\lambda = \emptyset$ für alle $\lambda \in \Delta_+ \cup \Delta_-$ gilt. Wir setzen

$$\Sigma := \bigcup_{\lambda \in \Delta_+ \cup \Delta_- \cup \{\infty\}} \Delta_\lambda.$$

Wegen Satz 3.5 liegen in $\sigma(\mathbf{L}) \setminus \Sigma$ nur noch endlich viele, isolierte Eigenwerte von $\mathbf{L}$ mit endlicher algebraischer Vielfachheit, also ist $E(\{t\})$ erklärt, und es gilt

$$\mathcal{H} = \sum_{\lambda \in \Delta_+ \cup \Delta_- \cup \{\infty\}} E(\Delta_\lambda)\mathcal{H} \ \ [\dot{+}] \sum_{t \in \sigma(\mathrm{L}) \setminus \Sigma} E(\Delta_t)\mathcal{H} \ \ [\dot{+}] \ \ \mathcal{H}_0, \tag{4.18}$$

wobei $\mathcal{H}_0$ der Riesz-Spektralraum ist, der zum nichtreellen Spektrum $\sigma_0(\mathbf{L})$ gehört. Da $\mathbf{L} \in \Pi$ ist, ist $\mathcal{H}_0$ endlichdimensional. Also besitzt $(\mathcal{H}_0, (\cdot,\cdot)_\mathcal{H})$ eine Basis aus Eigenvektoren und assoziierten Vektoren. Die zweite Summe in (4.18) ergibt ebenfalls einen endlichdimensionalen Raum, also existiert für diesen Raum eine Basis bestehend aus Eigenvektoren und assoziierten Vektoren. Ferner ist $\mathbf{L}|_{E(\Delta_\lambda)\mathcal{H}}$ für $\lambda \in \Delta_+ \cup \Delta_- \cup \{\infty\}$ ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $(E(\Delta_\lambda)\mathcal{H}, [\cdot,\cdot]_\mathcal{H})$ beziehungsweise im Hilbertraum $(E(\Delta_\lambda)\mathcal{H}, -[\cdot,\cdot]_\mathcal{H})$ mit abzählbarem Spektrum. Also existiert eine Orthonormalbasis von $(E(\Delta_\lambda)\mathcal{H}, \pm[\cdot,\cdot]_\mathcal{H})$

aus Eigenvektoren von $\mathbf{L}$. Offenbar ist die Vereinigung dieser Basen eine Rieszbasis mit der geforderten Eigenschaft. $\square$

Da $(\Delta_+ \cup \Delta_-) \cap c(\mathbf{L}) = \emptyset$ gilt, ist $E(\{\lambda\})$ für $\lambda \in \Delta_+ \cup \Delta_-$ wohldefiniert. Es sei τ die Menge aller $\lambda \in \Delta_+ \cup \Delta_-$, für die $\lambda \in \sigma_p(\mathbf{L})$ ist. Mittels $E(\tau)$ erhält man die Zerlegung

$$\mathcal{H} = E(\tau)\mathcal{H}[\dotplus]\,(I - E(\tau))\mathcal{H}.$$

Mit $\mathbf{L}_1$ bezeichnen wir die Einschränkung von $\mathbf{L}$ auf $E(\tau)\mathcal{H}$ und mit $\mathbf{L}_2$ bezeichnen wir die Einschränkung von $\mathbf{L}$ auf $(I - E(\tau))\mathcal{H}$. Der Operator $\mathbf{L}_1$ ist beschränkt und sein Spektrum besteht aus endlich vielen halbeinfachen Eigenwerten mit unendlicher geometrischer Vielfachheit. Für $\mathbf{L}_2$ gilt $\sigma_p(\mathbf{L}_2) \cap (\Delta_+ \cup \Delta_-) = \emptyset$. Wir setzen $\mathcal{H}' := (I - E(\tau))\mathcal{H}$.

Lemma 4.12 *Die $u_j^\pm$, $1 \le j \le n_\pm$, seien Elementarfunktionen. Dann ist die Menge* $\operatorname{ls}\{(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0' : \lambda \in \rho(\mathbf{L})\}$ *dicht in $\mathcal{H}' = (I - E(\tau))\mathcal{H}$.*

Beweis. (1) Wir zeigen zunächst $\operatorname{cls}\{(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0' : \lambda \in \rho(\mathbf{L})\} \subseteq \mathcal{H}'$. Es sei h ein Eigenvektor von $\mathbf{L}$ zu einem Eigenwert ξ mit $\xi \in \tau$. Aus Lemma 4.8 bzw. Lemma 4.9 folgt, daß h die Gestalt $h = (0 \quad \tilde{h})^T$ mit $\tilde{h} \in \mathcal{K}$ hat. Es gilt dann für $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$

$$\left[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0', h\right]_{\mathcal{H}} = \left[\mathbf{d}_0', (\mathbf{L}-\overline{\lambda})^{-1}h\right]_{\mathcal{H}} = \left[\mathbf{d}_0', (\xi-\overline{\lambda})^{-1}\,h\right]_{\mathcal{H}} = 0.$$

Also gilt $E(\tau)\mathcal{H}\,[\perp]\operatorname{cls}\{(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0' : \lambda \in \rho(\mathbf{L})\}$.

(2) Um zu beweisen, daß $\operatorname{cls}\{(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0' : \lambda \in \rho(\mathbf{L})\} = \mathcal{H}'$ ist, zeigen wir, daß aus

$$\left[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}\mathbf{d}_0', \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \rho(\mathbf{L}) \tag{4.19}$$

mit $g \in \mathrm{L}_2(0,1)$, $h \in \mathcal{K}$ und $\binom{g}{h} \in \mathcal{H}'$ folgt, daß $\binom{g}{h}$ der Nullvektor ist. Es sei zunächst λ_0 ein isolierter Eigenwert von $\mathbf{L}$, und Γ sei ein hinreichend kleiner positiv orientierter Kreis in der Resolventenmenge von $\mathbf{L}$, so daß im Innern von Γ außer λ_0 keine weiteren Punkte des Spektrums liegen. Nach Satz 1.14 ist λ_0 ein Pol der Resolvente der Ordnung $\le k(\lambda_0; p) + 1$, wobei p ein definisierendes Polynom von $\mathbf{L}$ ist. Wir betrachten die Laurententwicklung der Resolvente von $\mathbf{L}$ in einer punktierten Umgebung von λ_0. Es seien P_j, $1 \le j \le k(\lambda_0; p) + 1$, die Koeffizienten des Hauptteiles dieser Laurententwicklung. Dann gilt nach [Ka, III.§6]

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda - \lambda_0)^{j-1}(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}d\lambda.$$

Aus (4.19) ergibt sich dann

$$\left[\mathbf{d}_0', P_j\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{für} \quad 1 \le j \le k(\lambda_0; p) + 1. \tag{4.20}$$

Wir wollen zeigen, daß $P_j\binom{g}{h} = 0$ gilt für $1 \leq j \leq k(\lambda_0; p) + 1$. Angenommen es gelte $P_j\binom{g}{h} \neq 0$ für ein j. Dann existiert ein j_0, $j \leq j_0 \leq k(\lambda_0; p) + 1$, so daß $P_{j_0}\binom{g}{h} \neq 0$ und $P_{j_0+1}\binom{g}{h} = 0$ gilt. Dann ist $\binom{u}{v} := P_{j_0}\binom{g}{h} \neq 0$ und ein Eigenvektor von $\mathbf{L}$ in λ_0, da $(\mathbf{L} - \lambda_0)P_{j_0} = P_{j_0+1}$ gilt. Aus (4.20) und der Definition von $\mathbf{d}_0'$ folgt $u'(0) = 0$. Ferner ist $\binom{u}{v} \in \mathcal{D}(\mathbf{L})$ und somit gilt $u(0) = 0$. Nach Satz 3.2 (2) ist $\lambda_0 \in \sigma_p(T)$, da $\lambda_0 \notin \Delta_+ \cup \Delta_-$ ist. Also gilt $T(\lambda_0)u = 0$. Da aber $u(0) = u'(0) = 0$ ist, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz $u \equiv 0$. Mit (3.7) aus Satz 3.2 folgt dann $v \equiv 0$. Das bedeutet aber, da λ_0 ein beliebiger isolierter Eigenwert von $\mathbf{L}$ war, daß $\binom{g}{h}$ orthogonal zu allen Eigenvektoren und assoziierten Vektoren ist, die zu isolierten Punkten des Spektrums gehören. Nach Satz 4.11 bilden die Eigenvektoren und assoziierten Vektoren, die zu isolierten Punkten des Spektrums gehören eine Rieszbasis von $\mathcal{H}'$. Daraus folgt $\binom{g}{h} = 0$, womit das Lemma bewiesen ist. □

Da das nichtreelle Spektrum von $\mathbf{L}$ endlich ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\{i, -i\} \subset \rho(\mathbf{L})$ gilt. Im folgenden werde dies angenommen. Wie im Abschnitt 1.5 setzen wir

$$\psi(z) := \frac{z - i}{z + i}, \; \varphi(\xi) := i\frac{1 + \xi}{1 - \xi} \quad \text{und} \quad \mathbf{U} := \psi(\mathbf{L}).$$

Dann ist $\mathbf{U}$ ein definisierbarer unitärer Operator im Kreinraum $\mathcal{H}$, und es gilt $\psi \circ \varphi = id$.

Lemma 4.13 *Es sei $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$, $\lambda \neq -i$, und $\xi := \psi(\lambda)$. Dann gilt*

$$(\mathbf{U} + \xi)(\mathbf{U} - \xi)^{-1} = -i(\lambda + (1 + \lambda^2)(\mathbf{L} - \lambda)^{-1}).$$

Beweis. Es sei also $\lambda \in \rho(\mathbf{L})$, $\lambda \neq -i$, und $\xi := \psi(\lambda)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
(\mathbf{U} + \xi)(\mathbf{U} - \xi)^{-1} &= (\psi(\mathbf{L}) + \psi(\lambda))(\psi(\mathbf{L}) - \psi(\lambda))^{-1} = \\
&= \left(\frac{\mathbf{L} - i}{\mathbf{L} + i} + \frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)\left(\frac{\mathbf{L} - i}{\mathbf{L} + i} - \frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-1} = \\
&= (1 + \lambda\mathbf{L})(i\mathbf{L} - i\lambda)^{-1} = -i(\lambda + (1 + \lambda^2)(\mathbf{L} - \lambda)^{-1}).
\end{aligned}$$

□

Wir setzen $\widetilde{m}(\xi) := -im(\varphi(\xi))$ für $\varphi(\xi) \in \rho(\mathbf{L})$. Dann gilt $-i\operatorname{Re} m(i) = i\operatorname{Im}\widetilde{m}(0)$. Außerdem ist $\widetilde{m}$ eine definisierbare Funktion im Sinne der Definition 2.4.

Lemma 4.14 *Für ξ mit $\varphi(\xi) \in \rho(\mathbf{L})$ und $x := (\mathbf{L} - i)^{-1}\mathbf{d}_0'$ gilt*

$$\widetilde{m}(\xi) = i\operatorname{Im}\widetilde{m}(0) + \left[(\mathbf{U} + \xi)(\mathbf{U} - \xi)^{-1}x, x\right]_{\mathcal{H}}. \tag{4.21}$$

Beweis. Sei $\lambda := \varphi(\xi) \in \rho(\mathbf{L})$. Dann gilt wegen Lemma 4.5, Lemma 4.6 und Lemma 4.13

$$\begin{aligned}
\Big[(\mathbf{U}+\xi)(\mathbf{U}-\xi)^{-1}x,x\Big]_{\mathcal{H}} &= -i\,\lambda\,[x,x]_{\mathcal{H}} - i\,(1+\lambda^2)\,\Big[(\mathbf{L}-\lambda)^{-1}x,x\Big]_{\mathcal{H}} = \\
&= -i\,\lambda\frac{m(i)-\overline{m(i)}}{2i} - \\
&\quad -i\left(m(\lambda) - \frac{(\lambda+i)m(i)}{2i} + \frac{(\lambda-i)\overline{m(i)}}{2i}\right) = \\
&= -i\,m(\lambda) - \frac{1}{2i}(m(i)+\overline{m(i)}) = \\
&= -im(\lambda) + i\,\mathrm{Re}\,m(i) = \widetilde{m}(\xi) - i\,\mathrm{Im}\,\widetilde{m}(0).
\end{aligned}$$

□

Lemma 4.15 *Es sei* $\mathbf{U} = \psi(\mathbf{L})$, *die* $u_j^\pm$, $1 \le j \le n_\pm$, *seien Elementarfunktionen. Dann ist* $\mathrm{ls}\,\{\mathbf{U}^n(\mathbf{L}-i)^{-1}\mathbf{d}_0' : n \in \mathbf{Z}\}$ *dicht in* $\mathcal{H}' = (I - E(\tau))\mathcal{H}$.

Beweis. Wie schon zuvor sei $x := (\mathbf{L}-i)^{-1}\mathbf{d}_0'$. Aus Lemma 4.12 folgt, daß $\mathrm{cls}\,\{(\mathbf{L}-z)^{-1}x : z \in \rho(\mathbf{L})\} = \mathcal{H}'$ ist. Ein Element $y \in \mathrm{ls}\,\{\mathbf{U}^n x : n \in \mathbf{Z}\}$ hat die Gestalt $y = R(\mathbf{U})x$, wobei R eine rationale Funktion ist, die nur Polstellen in $\{0,\infty\}$ hat. Wir wählen ein $z \in \rho(\mathbf{L})$. Es genügt zu zeigen, daß eine Folge R_n rationaler Funktionen existiert, die nur Polstellen in $\{0,\infty\}$ haben, so daß $\lim_{n\to\infty} R_n(\mathbf{U})x = (\mathbf{L}-z)^{-1}x$ gilt. Wir setzen $f(\lambda) := (\varphi(\lambda)-z)^{-1}$. Da $\mathbf{U}$ ein definisierbarer unitärer Operator im Kreinraum $\mathcal{H}$ ist (siehe Abschnitt 1.5), liegen nur endlich viele Punkte des Spektrums von $\mathbf{U}$ außerhalb der Einheitskreislinie. Es existiert daher eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{C}$, und eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$, $K \subset G$, mit den Eigenschaften:

(1) es gilt $\sigma(\mathbf{U}) \subset K \subset G$,

(2) die Menge $\hat{\mathbb{C}} \setminus G$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten, und in jeder dieser Komponenten liegt ein Punkt aus $\{0,\infty\}$,

(3) und es gilt $\psi(z) \notin G$.

Dann ist f eine auf G holomorphe Funktion. Aus [Con2, VIII 1.14] folgt die Existenz einer Folge rationaler Funktionen R_n mit Polen nur in $\{0,\infty\}$, die auf K gleichmäßig gegen f konvergiert. Wegen [DS, VII 3.13] gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(\mathbf{U}) = f(\mathbf{U}) = (\mathbf{L}-z)^{-1}$ in der Operatornorm. □

Der folgende Satz ist die Zusammenfassung der vorangehenden Untersuchungen und ist das Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz 4.16 *Es mögen die Voraussetzungen von Satz* 4.1 *gelten, und die* $u_j^\pm$, $1 \le j \le n_\pm$ *seien Elementarfunktionen. Dann läßt sich der Operator* $\mathbf{L}$ *zerlegen in zwei Operatoren* $\mathbf{L}_1 := \mathbf{L}|_{E(\tau)\mathcal{H}}$ *und* $\mathbf{L}_2 := \mathbf{L}|_{(I-E(\tau))\mathcal{H}}$. *Dabei ist die*

Menge τ wie auf Seite 48 gewählt. Der Operator $\mathbf{L}_1$ ist beschränkt, und sein Spektrum besteht aus endlich vielen halbeinfachen Eigenwerten mit unendlicher geometrischer Vielfachheit. Die Cayleytransformierte von $\mathbf{L}_2$ ist unitär äquivalent zu dem Operator $U_{\widetilde{m}}$ der Multiplikation mit der unabhängigen Veränderlichen im Kreinraum $\mathcal{K}_{\widetilde{m}}$ (siehe Seite 23).

Beweis. Da $\mathbf{U}$ mit der Resolvente von $\mathbf{L}$ vertauschbar ist, ist $\mathbf{U}$ wegen Satz 1.15(2) auch vertauschbar mit $I-E(\tau)$. Das heißt $\mathbf{U}$ bildet $(I-E(\tau))\mathcal{H} = \mathcal{H}'$ in sich ab. $\mathbf{U}' = \mathbf{U}|_{\mathcal{H}'}$ ist also ein definisierbarer unitärer Operator im Kreinraum $\mathcal{H}'$ Da nach Lemma 4.12 $x = (\mathbf{L}-i)^{-1}\mathbf{d}_0' \in \mathcal{H}'$ gilt, läßt sich Gleichung (4.21) für ξ mit $\varphi(\xi) \in \rho(\mathbf{L})$ umformen zu

$$\widetilde{m}(\xi) = i \operatorname{Im} \widetilde{m}(0) + \left[(\mathbf{U}' + \xi)(\mathbf{U}' - \xi)^{-1}x, x\right]_{\mathcal{H}'},$$

wobei $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}'}$ die Einschränkung von $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{H}}$ auf $\mathcal{H}' \times \mathcal{H}'$ ist. Mit Lemma 4.15 ergibt sich $\operatorname{cls}\{(\mathbf{U}')^n x : n \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{H}'$. Ferner folgt aus $c_\infty(\mathbf{L}) = \emptyset$ (Satz 3.7) auch $c_\infty(\mathbf{U}') = \emptyset$ (vgl. Abschnitt 1.6). Aus Satz 2.5 folgt nun die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Wir könnten auch einen Kreinraum von Funktionen direkt mit Hilfe des Titchmarsh-Weyl-Koeffizienten m einführen. Aus technischen Gründen haben wir darauf verzichtet, weil der Multiplikationsoperator in diesem Raum dann unbeschränkt wäre. Im Rahmen unserer Überlegung ist die inverse Cayleytransformation $\varphi(U_{\widetilde{m}}) = i(1+U_{\widetilde{m}})(1-U_{\widetilde{m}})^{-1}$ des Multiplikationsoperators $U_{\widetilde{m}}$ unitär äquivalent zu $\mathbf{L}_2$.

Literaturverzeichnis

[ALM] Atkinson, F.V.; Langer, H.; Mennicken, R. : *Sturm-Liouville problems with coefficients which depend analytically on the eigenvalue parameter*, Acta Sci. Math. (Szeged) **57**, 1993, 25-44.

[ALMS] Atkinson, F.V.; Langer, H.; Mennicken, R.; Shkalikov, A.A. : *The essential spectrum of some matrix operators* , Math. Nachr. **167**, 1994.

[AI] Azizov, T.Ya.; Iokhvidov, I.S. : *Linear operators in spaces with an indefinite metric*, John Wiley & Sons, Chichester, 1989.

[Ber] Berezanskii, J.M. : *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. **17**, AMS, Providence, RI, 1968.

[Bog] Bognár, J. : *Indefinite inner product spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[Bro] Brodskii, M.S. : *Triangular and Jordan representations of linear operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. **32**, AMS, Providence, RI, 1971.

[Con1] Conway, J.B. : *A course in functional analysis*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1990.

[Con2] Conway, J.B. : *Functions of one complex variable*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1978.

[DLdS1] Dijksma, A.; Langer, H.; de Snoo, H.S.V. : *Representations of holomorphic operator functions by means of resolvents of unitary or selfadjoint operators in Krein spaces* , Operator Theory: Advances and Applications, Vol. **24**, Birkhäuser Verlag Basel, 1987, 123-143.

[DLdS2] Dijksma, A.; Langer, H.; de Snoo, H.S.V. : *Unitary colligations in Krein spaces and their role in the extension theory of isometries and symmetric linear relations in Hilbert space*, Lecture Notes in Mathematics, **1242**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1987, 1-42.

[DS] Dunford, N.; Schwartz, J.T. : *Linear operators, Part I*, Interscience Publishers, New York, 1958.

[GGK] Gohberg, I.; Goldberg, S.; Kaashoek, M.A. : *Classes of linear operators*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. **49**, Birkhäuser Verlag Basel, 1990.

[GK] Gohberg, I.; Krein, M.G. : *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs, vol. **18**, AMS, Providence, RI, 1969.

[Jon1] Jonas, P. : *On the functional calculus and the spectral function for definitizable operators in Krein spaces*, Beiträge Anal. **16**, 1981, 121-135.

[Jon2] Jonas, P. : *A class of operator-valued meromorphic functions on the unit disc*, Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. Vol. **17**, 1992, 257-284.

[Jon3] Jonas, P. : *On representations of locally definitizable operator functions*, 1995 (in Vorbereitung).

[JL1] Jonas, P.; Langer, H. : *Compact pertubations of definitizable operators*, J. Operator Theory **2**, 1979, 63-77.

[JL2] Jonas, P.; Langer, H. : *Some questions in the pertubation theory of J-nonnegative operators in Krein spaces*, Math. Nachr. **114**, 1983, 205-226.

[Ka] Kato, T. : *Pertubation theory for linear operators*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

[Kth] Köthe, G. : *Topologische lineare Räume I*, 2. Auflage Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 107, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

[Lan] Langer, H. : *Spectral functions of definitizable operators in Krein spaces*, Functional Analysis Proceedings of a conference held at Dubrovnik, Yugoslavia, November 2-14, 1981, Lecture Notes in Mathematics, **948**, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1982, 1-46.

[Li] Lifschitz, A.E. : *Magnetohydrodynamics and spectral theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1989.

[LMM] Langer, H.; Mennicken, R.; Möller, M. : *A second order differential operator depending nonlinearly on the eigenvalue parameter* , Operator Theory: Advances and Applications, Vol. **48**, Birkhäuser Verlag Basel, 1990, 319-332.

[We] Weidmann, J. : *Lineare Operatoren in Hilberträumen*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1976.