Blatt 01

Analysis 4
im SS 2018

Abgabe am 27.04.18.

Aufgabe 1: (5P) Betrachten Sie die Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$,

$$x(t) = t, \quad y(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ t^2 \sin(1/t), & t \in (0,1] \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass γ rektifizierbar ist.

Aufgabe 2: (5P) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass der Graph von f in $\mathbb{R}^2$ eine Kurve mit dem Flächeninhalt 0 ist.

Tip: Überdeckung mit Rechtecken beliebig kleinen Inhalts.

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine glatte Kurve in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt von $\gamma([a,b])$ gleich 0 ist.

Tip: Satz von der impliziten Funktion.

Aufgabe 3: (5P)

Sei $a > 0$. Berechnen Sie die Länge folgender Kurven in $\mathbb{R}^2$:

1. Der Kreis $x = a\cos t, y = a\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. Die Astroide $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$.
3. Die Zykloide $x = a(t\sin t + \cos t), y = a(\sin t - t\cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
4. Die Kettenlinie $y = a\cosh(x/a)$, $x \in [-1, 1]$.
5. Die Parabel $y = x^2/2a$, $x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 4: (5P)

Eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ sei in Polarkoordinaten durch eine C^1-Funktion $r(\phi), \phi \in [\alpha, \beta]$ gegeben.

Bestimmen Sie eine Formel zu Berechnung der Bogenlänge.

Sei $a > 0$. Berechnen Sie die Länge folgender Kurven in $\mathbb{R}^2$:

1. Die Archimedische Spirale $r = a\phi$, $\phi \in [0, \beta]$.
2. Die logarithmische Spirale $r = ae^{m\phi}, m \in \mathbb{R}$, $\phi \in [0, 2\pi]$, .