

Analysis 4 im SS 2018

Abgabe am 11.05.18.

Aufgabe 1: (8P) Seien reelle $k \neq 0$ und $a > 0$ fest gewählt. Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma_a(t) = (\cosh(kt))^{-1}(\cos t, \sin t, \sinh kt)^T, \quad t \in [-a, a].$$

Zeigen Sie, dass durch γ_a ein Bogen auf der Einheitssphäre im \mathbb{R}^3 beschrieben wird, der alle Meridiane unter demselben Winkel schneidet. Berechnen Sie diesen Winkel, und bestimmen Sie $\lim_{a \rightarrow \infty} L(\gamma_a)$ für die Kurvenlänge $L(\gamma_a)$.

Bem.: Eine derartige Kurve heißt Loxodrome.

Aufgabe 2: (4P) Skizzieren Sie die folgenden in Polarkoordinaten gegebenen Kurven und berechnen Sie deren Länge.

1. $r = \sin \phi, \quad \phi \in [0, \pi]$.
2. $r = \phi^2, \quad \phi \in [0, \pi]$.

Aufgabe 3: (4P) Unter der Wirkung des Kraftfeldes $f(x, y) = (2xy, x^2 + y^2)^T$ bewege sich ein Massenpunkt auf der Parabel $y = x^2$ vom Punkt $(1, 1)$ zum Punkt $(2, 4)$. Welche Arbeit wird dabei verrichtet?

Aufgabe 4: (4P)

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}(x, y, z)^T$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion hat.