Blatt 01

Differenzialgleichungen
im SS 2018

Aufgabe 1: Lösen Sie die nichtlineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_3 x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit $x(0) = (a, b, c)^T$ für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2: Beweisen Sie das Gronwall-Lemma in der folgenden Form:
Seien $\psi : \ [0, c] \to [0, \infty)$ stetig und $\alpha, \beta \geq 0$, und es gelte

$$\psi(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t \psi(s) ds, \qquad t \in [0, c].$$

Dann gilt:

$$\psi(t) \leq \alpha e^{\beta t}, \qquad t \in [0, c].$$

Tip: Betrachte

$$y(t) := \beta \int_0^t \psi(s) ds, \qquad z(t) := e^{-\beta t} y(t).$$

Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung: Seien $\alpha, \beta, \psi : \ [0, c] \to [0, \infty)$ stetig, und es gelte

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s) \psi(s) ds, \qquad t \in [0, c].$$

Dann gilt:

$$\psi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s) \beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(u) du \right) ds, \qquad t \in [0, c].$$

Tip: Betrachte

$$y(t) := \int_0^t \beta(s) \psi(s) ds, \qquad z(t) := \exp\left(- \int_0^t \beta(u) du \right) y(t).$$

Aufgabe 3: Gegeben seien die Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = \sin^3(x), \quad x(0) = 1 \quad \text{und} \quad \dot{y} = \sin^3(y), \quad y(0) = \pi.$$

(i) Zeigen Sie, dass die rechte Seite $f(x) = \sin^3(x)$ Lipschitz-stetig ist und berechnen Sie eine Lipschitz-Konstante.

(ii) Zeigen Sie, dass die beiden Anfangswertprobleme eindeutige Lösungen besitzen.

(iii) Schätzen Sie die Differenz $|x(t) - y(t)|$ für $t \geq 0$ ab (ohne die Lösungen x und y zu berechnen).

Aufgabe 4: Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ein stetiges Vektorfeld, bei dem die Lipschitz-Konstante L bezüglich x nicht von der Wahl der kompakten Menge K abhängt (man sagt dann, dass f global Lipschitz-stetig in x ist). Beweisen Sie mit Hilfe des Gronwall-Lemmas, dass für die maximalen Existenzintervalle dann $I_{t_0,x_0} = \mathbb{R}$ für alle $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ gilt.

Tip: Nehmen Sie an, dass $I_{t_0,x_0} = (a, b)$ gilt, und unterscheiden Sie für $t \to b$ bei der Lösung $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ die drei möglichen Fälle Konvergenz, bestimmte Divergenz für $\|x(t)\|$, unbestimmte Divergenz.