Blatt 03

Differenzialgleichungen
im SS 2018

Aufgabe 1: Gegeben sei eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mit stetigem und bzgl. x lokal Lipschitz-stetigem Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^N$ auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^N$. Gegeben sei ferner ein Gleichgewicht x^* dieser Gleichung auf (a, ∞) und eine *feste* Anfangszeit $t_0 > a$. Zeigen Sie:

a) Gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle x_0 mit $||x_0 - x^*|| < \delta$ die Abschätzung

$$||x(t; t_0, x_0) - x^*|| < \epsilon \quad \text{für alle } t \geq t_0 \tag{1}$$

gilt, so ist x^* stabil.

b) Gibt es ein $\eta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle x_0 mit $||x_0 - x^*|| < \eta$ die Beziehung

$$\lim_{t \to \infty} ||x(t; t_0, x_0) - x^*|| = 0 \tag{2}$$

gilt, so ist x^* attraktiv.

Aufgabe 2: Das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2^3 \end{aligned} \tag{3}$$

ist eine Störung des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1. \end{aligned} \tag{4}$$

(i) Zeigen Sie, dass $(0, 0)^T$ ein Gleichgewicht beider Systeme ist.

(ii) Zeigen Sie, dass das Gleichgewicht für das System (3) asymptotisch stabil und für das System (4) stabil ist.

Tip: Die Funktion $V(x_1, x_2) := ax_1^2 + bx_2^2$, mit $a, b > 0$ kann beim Stabilitätsnachweis hilfreich sein.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Gleichgewichte und weisen Sie asymptotische Stabilität der Gleichgewichte nach.