

Funktionentheorie und Integraltransformation im SS 2019

Aufgabe 1: Lösen Sie die Gleichungen:

$$z^2 - 3z + 3 = i, \quad z^3 = 1 - i, \quad (z - 3i)^6 = -64.$$

Aufgabe 2: Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

- (a) Leiten Sie die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen direkt aus der Definition der Ableitung $f'(z)$ her mittels Annäherung entlang spezieller Pfade.
- (b) Stellen Sie die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen in Polarkoordinaten dar.

Aufgabe 3: Der Hauptwert des Logarithmus einer komplexen Zahl $z = re^{i\phi}$, $r > 0$, $-\pi < \phi \leq \pi$ wird wie folgt definiert:

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i\phi.$$

Zeige: $\operatorname{Log} z$ ist auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ holomorph. Bestimme die Ableitung.

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Holomorphie:

- (a) $\operatorname{Re}(z)$,
- (b) $\frac{1}{|z|}$,
- (c) $f(z) = e^y(\sin x + i \cos x)$, $z = x + iy$.

Aufgabe 5: Für $f \in H(\mathbb{C})$ gelte a) $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{const.}$ oder b) $|f(z)| = \operatorname{const.}$ Zeige in beiden Fällen, dass f konstant ist.