Blatt 03

Funktionentheorie und Integraltransformation
im SS 2019

Aufgabe 1: Für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ sei $f : D(z_0; r) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe, nullstellenfreie Funktion. Zeige die Existenz einer holomorphen Funktion $h : D(z_0; r) \to \mathbb{C}$, sodass für alle $z \in D(z_0; r)$

$$e^{h(z)} = f(z)$$

gilt. Die Abbildung h wird als *Zweig des Logarithmus von* f bezeichnet.
Zeige weiterhin die Existenz einer holomorphen Funktion $w : D(z_0; r) \to \mathbb{C}$, sodass für alle $z \in D(z_0; r)$

$$(w(z))^2 = f(z)$$

gilt. *Tip: Betrachte $f'(z)/f(z)$, verwende Satz von Cauchy.*

Aufgabe 2: Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n \in H(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von holomorphen Funktionen, die gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen eine Funktion f konvergiert. Zeige $f \in H(\Omega)$.

Erinnerung: Eine Funktion wird *ganz* genannt, wenn sie holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 3: Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Des Weiteren bezeichne $c_{n,a}$ den n-ten Koeffizienten der (lokalen) Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n,a}(z-a)^n$ von f im Punkt a. Für jedes $a \in \mathbb{C}$ verschwinde mindestens ein Koeffizient $c_{n,a}$. Zeige, f ist ein Polynom.

Tip: Betrachte die Menge $K = \{a \in \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } f^{(n)}(a) = 0\}$, benutze Identitätssatz.