Blatt 04

Funktionentheorie und Integraltransformation
im SS 2019

Aufgabe 1: Sei f holomorph in $D(z_0, R)$. Zeige für $0 < r < R$ die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw,$$

wobei der Kreis $|w - z_0| = r$ einmal durchlaufen wird.

Tip: Sei $|z - z_0| < r$. Zeige

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^n,$$

untersuche die Konvergenz, und benutze die Cauchysche Integralformel.

Aufgabe 2: Bestimme die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{z^2}\, dz,$

(a) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz.$

Aufgabe 3 (Satz von Liouville): Es sei f eine ganze Funktion. Zeige, ist f beschränkt, so ist f konstant.

Aufgabe 4 (Fundamentalsatz der Algebra): Zeige, dass jedes komplexe Polynom vom Grad $n \geq 1$ mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt.

Tip: Verwende den Satz von Liouville.

Aufgabe 5: Seien f und g zwei ganze Funktionen. Zeige. Genau dann gilt $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wenn $f(z) = cg(z)$ für ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| \leq 1$ gilt.

Tip: Betrachte Fortsetzungen von $h(z) := f(z)/g(z)$.