Blatt 05

Funktionentheorie und Integraltransformation
im SS 2019

Aufgabe 1: Sei f holomorph in $D(0, 1+\epsilon)$, für ein $\epsilon > 0$ mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| < 1$ in $D(0, 1)$. Zeige $|f'(0)| \leq 1$.

Aufgabe 2: Es seien p und q zwei Polynome, wobei der Grad von q um mindestens 2 größer sei als der Grad von p. Die rationale Funktion $R = \frac{p}{q}$ habe keine Polstellen auf der reellen Achse. Zeige, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{z\in\mathbb{C}^+} \mathrm{res}_z R \quad \text{für} \quad \mathbb{C}^+ := \{\, z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \,\}$$

gilt! Berechne den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 3: Beweise, dass

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.

Hinweis: Betrachte einen Weg von 0 *nach* R *nach* $R \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ *nach* 0.

Aufgabe 4: Berechne den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$