Henrik Winkler
TU Ilmenau

Sommersemester 2018

Systemtheorie 2
Übungsblatt 1

Aufgabe 1
Gegeben sei

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Bestimmen Sie alle (α, β), für die (A, b) steuerbar ist.
2. Geben Sie für die Paare (α, β), für die (A, b) nicht steuerbar ist, die nicht steuerbaren Eigenwerte an (das sind die Eigenwerte $\lambda \in \sigma(A)$, für die $\mathrm{rk}[\lambda I_3 - A, b] < 3$ ist).
3. Für welche (α, β) ist (A, b) stabilisierbar (das heißt, es gibt ein $f \in \mathbb{R}^{1\times 3}$, so dass $\sigma(A + bf) \subset \mathbb{C}_-$ ist)?

Aufgabe 2
Gegeben sei das System $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$. Zeigen Sie: Das System ist genau dann steuerbar, wenn das Gleichungssystem

$$AX - XA = 0, \quad XB = 0$$

nur die triviale Lösung $X = 0$ besitzt.

Hinweis: Benutzen Sie Links- und Rechtseigenvektoren von A und das Hautus-Kriterium.

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ genau dann steuerbar ist, wenn gilt:

$$\forall C \in \mathbb{R}^{p\times n} \setminus \{0\} \ \exists s \notin \sigma(A): \ G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B \neq 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie die aus Systemtheorie 1 bekannte Kalman-Zerlegung:

$$\exists S \in GL_n(\mathbb{R}) : S^{-1}AS = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}, \ S^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ (A_1, B_1) \text{ ist steuerbar.}$$

Aufgabe 4
Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \quad C \in \mathbb{R}^{p\times n}, D \in \mathbb{R}^{p\times m}. \end{aligned}$$

Ein solches System heißt *ausgangssteuerbar*, falls gilt:

$$\forall x^0 \in \mathbb{R}^n, y_1 \in \mathbb{R}^p \, \exists T > 0, u \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}([0,T] \to \mathbb{R}^m) : y(T; x^0, u) = y_1.$$

Zeigen Sie: Das System ist genau dann ausgangssteuerbar, wenn gilt:

$$\operatorname{rk} \begin{bmatrix} D & CB & CAB & \dots & CA^{n-1}B \end{bmatrix} = p.$$

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis des Kalmanschen Steuerbarkeitskriteriums aus Systemtheorie 1.