Henrik Winkler
TU Ilmenau Sommersemester 2019

Systemtheorie 2
Übungsblatt 2

Aufgabe 1
Sei $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\mathcal{W} := \langle A \mid \operatorname{im} B\rangle$. Der *stabilisierbare Unterraum* von (A, B) sei definiert als

$$\mathcal{X}_{\text{stab}} = \{x^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}([0,\infty) \to \mathbb{R}^m) : \lim_{t\to\infty} x(t; x^0, u) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}_{\text{stab}}$ ein Vektorraum ist.
2. Beweisen Sie, dass $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}_{\text{stab}}$ gilt.
3. Geben Sie ein System an, für das $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{X}_{\text{stab}}$ ist.
4. Zeigen Sie: Wenn (A, B) stabilisierbar ist, so gilt $\mathcal{X}_{\text{stab}} = \mathbb{R}^n$.
5. Gegeben seien $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\eta \in \mathbb{C}^{1\times n} \setminus \{0\}$, so dass gilt:

   $$\eta\,[\lambda I_n - A, B] = 0$$

   Für beliebige $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$ sei $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $z(t) := \eta\, x(t; x^0, u)$. Weisen Sie nach, dass z folgende Differentialgleichung erfüllt:

   $$\dot{z} = \lambda z.$$

6. Beweisen Sie: (A, B) ist genau dann stabilisierbar, wenn $\mathcal{X}_{\text{stab}} = \mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 2
Wir betrachten das System $(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$. Ein Untervektorraum $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *stark invariant*

$$:\Leftrightarrow \forall x^0 \in \mathcal{V}\, \forall u \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^m)\, \forall t \geq 0 : x(t; x^0, u) \in \mathcal{V}.$$

Zeigen Sie:

1. Der Erreichbarkeitsraum $\langle A \mid \operatorname{im} B\rangle$ ist stark invariant.
2. $\mathcal{V}$ ist genau dann stark invariant, wenn $\mathcal{V}$ steuerungsinvariant ist und $\langle A \mid \operatorname{im} B\rangle \subseteq \mathcal{V}$ gilt.
3. Wenn $\mathcal{V}$ stark invariant ist, so gilt $(A + BF)\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ für alle $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$.
4. $\mathcal{V}$ ist genau dann stark invariant, wenn $A\mathcal{V} + \operatorname{im} B \subseteq \mathcal{V}$ gilt.

Aufgabe 3
Gegeben sei das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu(t), \quad && A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ y &= Cx, && C \in \mathbb{R}^{p\times n}. \end{aligned}$$

Der Untervektorraum aller *ausgangsnullsteuerbaren Anfangswerte* ist definiert als

$$\mathcal{S} := \{x^0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists T > 0, u \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^m)\, \forall t \geq T : y(t; x^0, u) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathcal{S} = \mathcal{V}^*(\ker C) + \langle A \mid \operatorname{im} B\rangle.$$

Hinweis: Benutzen Sie $x(T; x^0, u) = \mathrm{e}^{AT}x^0 + x(T; 0, u)$ und zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} x(T; x^0, u) &\in \mathcal{V}^*(\ker C), \\ x(T; 0, u) &\in \langle A \mid \operatorname{im} B\rangle \end{aligned}$$

gilt und dass $\mathcal{V}^*(\ker C) + \langle A \mid \operatorname{im} B\rangle$ ein A-invarianter Untervektorraum ist.