Henrik Winkler
TU Ilmenau Sommersemester 2018

Systemtheorie 2
Übungsblatt 5

Aufgabe 1
Gegeben sei das stabilisierbare System $(A,B) \in \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times m}$ und für $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}([0,T) \to \mathbb{R}^m)$ das Kostenfunktional

$$J(x^0,u,T) := \int_0^T x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top u(t)\, dt + x(T)^\top N x(T)$$

mit $T \in (0,\infty]$ und $Q = Q^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Q \geq 0$, $N = N^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $N \geq 0$.

Wir bezeichnen

$$J^*(x^0,T) := \inf_{u \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}([0,T)\to\mathbb{R}^m)} J(x^0,u,T).$$

Zeigen Sie, dass $0 \leq J^*(x^0,T) < \infty$ für alle $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < T \leq \infty$ ist.

Aufgabe 2
Sei $P : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $P(t) = P(t)^\top$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie:

1. Wenn $P(t_1) \leq P(t_2)$ für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 < \infty$ gilt und $x^\top P(\cdot)x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nach oben durch ein $M_x \geq 0$ beschränkt ist, so existiert $\lim_{t\to\infty} x^\top P(t)x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
2. Wenn $\lim_{t\to\infty} x^\top P(t)x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existiert, dann gibt es ein $P_0 = P_0^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_0$.
3. Wenn P differenzierbar ist und $\lim_{t\to\infty} P(t)$ sowie $\lim_{t\to\infty} \dot{P}(t)$ existieren, so gilt $\lim_{t\to\infty} \dot{P}(t) = 0$.

Aufgabe 3
Wir betrachten die *algebraische Riccati-Gleichung* $A^\top P + PA - PBB^\top P + Q = 0$ mit $Q \geq 0$.

1. Sei $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \geq 0$ eine Lösung der Gleichung und (Q,A) entdeckbar. Zeigen Sie, dass $\sigma(A - BB^\top P) \subseteq \mathbb{C}_-$ ist.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass es einen Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n$ zu einem Eigenwert $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+$ gibt, und betrachten Sie $v^*((A - BB^\top P)^\top P + P(A - BB^\top P))v$.

2. Sei $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P \geq 0$ eine Lösung der Gleichung. Zeigen Sie, dass $\ker P \subseteq \ker Q$ und $A \ker P \subseteq \ker P$ ist.

   Hinweis: Aus $x^\top Q x = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ folgt $Qx = 0$.

3. Sei $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \geq 0$ eine Lösung der Gleichung und (Q, A) beobachtbar. Zeigen Sie, dass dann $P > 0$ ist.
4. Sei (A, B) stabilisierbar. Zeigen Sie, dass die algebraische Riccati-Gleichung eine Lösung $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \geq 0$ besitzt.