Achim Ilchmann und Jonas Witschel
TU Ilmenau

Wintersemester 2017/2018

Analysis 1
Übungsblatt 2

Abgabe und Besprechung am 23.10.17 um 17:00 Uhr im Curie-Hörsaal.

Auf diesem Aufgabenblatt setzen wir die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, jeweils mit der üblichen Ordnung $\leq$ versehen, als bekannt voraus. $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ bezeichnet das Intervall von 0 bis unendlich, das die 0 enthält. $|\cdot|$ bezeichnet den Betrag einer Zahl.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildungen

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ z \mapsto z^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},\ z \mapsto z^2.$$

(i) Untersuchen Sie die Abbildung f auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie $f^{-1}(\{-4, -1, 0, 16, 17\})$.

(ii) Ist f nach oben/unten/auf beschränkten Mengen beschränkt?

(iii) Untersuchen Sie die Abbildung g auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie eine Abbildung h, für die gilt: $h \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$.

(iv) Ist g nach oben/unten/auf beschränkten Mengen beschränkt?

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ x \mapsto x^2$. Außerdem betrachten wir eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{R}$, die definiert ist durch

$$x \sim y \ :\Leftrightarrow\ |x| = |y| \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Äquivalenzklasse $[x]$ bezüglich $\sim$ gegeben ist durch $[x] = f^{-1}(\{f(x)\})$.

(iii) $\mathbb{R}/\!\sim$ bezeichne die Menge aller Äquivalenzklassen von $\mathbb{R}$ bezüglich $\sim$. Zeigen Sie, dass die Relation

$$\tilde{F} := \{(\tilde{x}, y) \in \mathbb{R}/\!\sim \times [0, \infty) \mid \exists x \in \tilde{x} : y = f(x)\}$$

eine Abbildung ist. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $\tilde{f} : \mathbb{R}/\!\sim\, \to [0, \infty)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ bijektiv ist.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(i) Sei $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge einer Menge X. Zeigen Sie, dass auf $\mathfrak{P}(X)$ durch

$$M \preceq N :\Leftrightarrow M \subseteq N$$

eine Ordnungsrelation $\preceq$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass $(\mathfrak{P}(X), \preceq)$ im Allgemeinen keine total geordnete Menge ist.

(ii) Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Zeigen Sie, dass bezüglich der Ordnungsrelation $\preceq$ gilt: $\sup(\mathfrak{A}) = \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Sei $(X, \leq)$ eine total geordnete Menge und seien $A, B \subseteq X$ nach oben beschränkte und $C, D \subseteq X$ nach unten beschränkte Mengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Behauptungen wahr sind, wenn die auftretenden Suprema und Infima existieren:

(i) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$,

(ii) $\inf(C \cup D) = \min\{\inf(C), \inf(D)\}$,

(iii) $A \subseteq B \implies \sup(A) \leq \sup(B)$,

(iv) $C \subseteq D \implies \inf(C) \geq \inf(D)$.